

Devoir Libre 4 : Correction

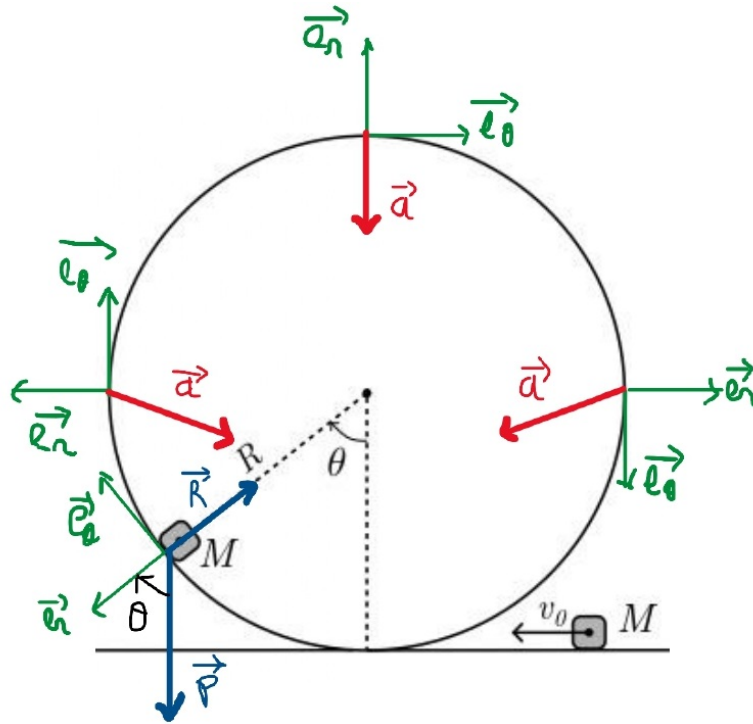
Exercice 1 : Le Blue Fire [24 pts]

32. [2pts] À la fin de la phase d'accélération le train a une vitesse $v_0 = at_a$. Au début du fer à cheval il a donc une énergie cinétique $E_{c0} = \frac{1}{2}mv_0^2$ et une énergie mécanique $E_{m0} = E_{c0} = 3,98 \text{ MJ}$ en prenant l'origine des altitudes en ce point. En négligeant la dissipation d'énergie, l'énergie initiale E_{m0} est suffisante pour atteindre le haut du fer à cheval où l'énergie potentielle de pesanteur est $E_{pp} = mgh = 3,63 \text{ MJ} < E_{m0}$.

33. [2pts] $\vec{OM} = R\vec{e}_r$ d'où $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ et $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$. Comme $\dot{\theta} > 0$ on a $v = R\dot{\theta}$ d'où $\dot{v} = R\ddot{\theta}$ et par suite

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{R}\vec{e}_r + \dot{v}\vec{e}_\theta$$

34. [2pts] En $\theta = \frac{\pi}{2}$ rad, le train monte donc $\dot{v} < 0$. En $\theta = \pi$ rad, le train atteint sa vitesse minimale donc $\dot{v} = 0$ et en $\theta = \frac{3\pi}{2}$ rad, le train descend donc $\dot{v} > 0$.



35. [2pts] Le train est soumis à son poids $\vec{P} = mg(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta)$ et à la force de réaction du rail $\vec{R} = N\vec{e}_r$. La projection du principe fondamental de la dynamique suivant $\vec{e}_\theta$ s'écrit donc

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta = 0$$

Cette équation n'est pas linéaire et n'a pas de solution analytique simple.

36. [4pts]

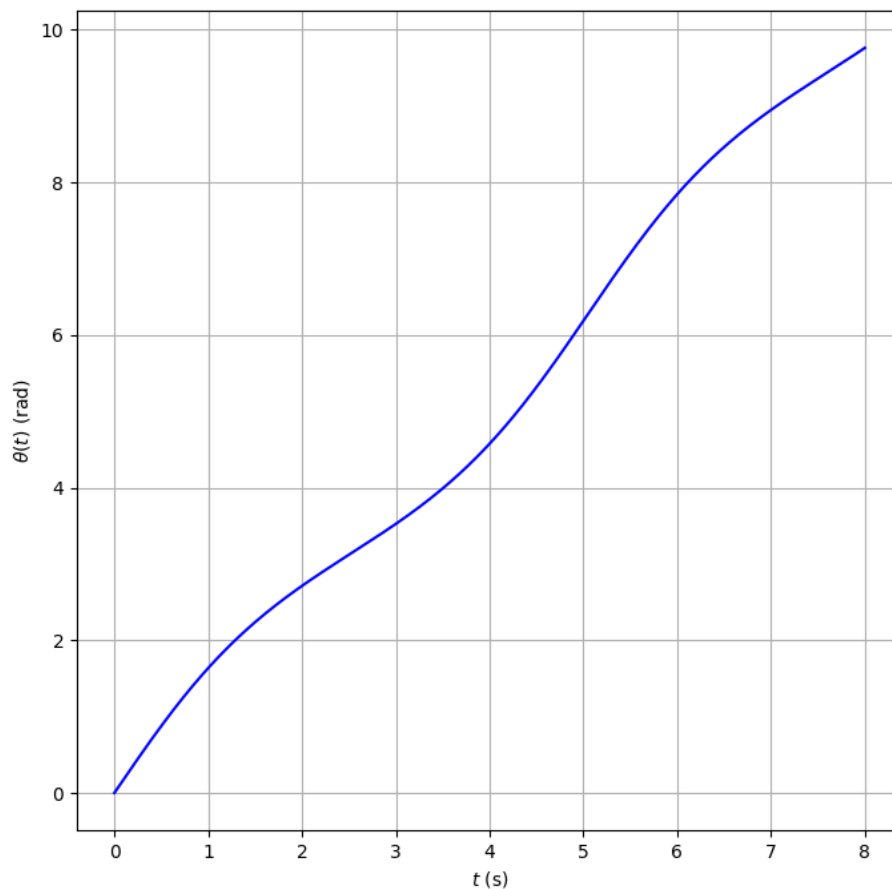
```
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
R = 15 # Rayon en m
g = 9.81 # acceleration de la pesanteur en m/s^2
v0 = 27 # vitesse initiale en m/s
tabt = np.linspace(0, 8, 1000) # tableau des temps
```

```
def derivee(X, t):
    return [X[1], -(g/R) * np.sin(X[0])]

theta0 = 0 # Angle initial
dtheta0 = v0 / R # Vitesse angulaire initiale
res = odeint(derivee, [theta0, dtheta0], tabt)

plt.figure(figsize=(8,8))
plt.plot(tabt, res[:,0], color='blue')
plt.xlabel(r"$t$ (s)")
plt.ylabel(r"$\theta(t)$ (rad)")
plt.grid(True)
plt.show()
```



37. [1pts] On lit $\theta = 2\pi$ rad (1 tour) pour $t \approx 5$ s.

38. [1pts] Les conditions de Gauss (rayons paraxiaux) permettent d'obtenir un stigmatisme approché.

39. [1pts] La relation de Descartes donne $d = \frac{Df'}{D - f'} = 5,1$ cm.

40. [1pts] La surface du capteur est la somme des surfaces des photosites : $a = \sqrt{\frac{L \times \ell}{N}} = 6 \mu\text{m}$.

41. [2pts] Un point A mobile donnera une image A' mobile se formant sur plusieurs photosites et rendant l'image floue. Un point A se déplace à la vitesse v pendant t_{exp} de A_1 à A_2 et l'image se déplace de A'_1 à A'_2 .

$$A'_1 A'_2 = \frac{d}{D} A_1 A_2 \quad \text{soit} \quad A'_1 A'_2 = \frac{d}{D} v t_{exp}$$

On peut considérer que l'image restera nette si $A'_1 A'_2 < a$ d'où $t_{exp} < \frac{aD}{dv} = 23 \mu\text{s}$.

Exercice 2 : Mobile sur un plan incliné [24pts]

1.1. [2pts] Il n'y a pas de dissipation d'énergie donc l'énergie mécanique du point matériel M se conserve. Choisissons l'origine de l'altitude z en bas de la pente lorsque la vitesse est v_0 . En haut de la pente, la distance parcourue par M est d_1 , son altitude est $d_1 \sin \alpha$ et sa vitesse est nulle.

$$mgd_1 \sin \alpha = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad \text{d'où} \quad d_1 = \frac{v_0^2}{2g \sin \alpha} \quad \text{AN : } d_1 = 3,7 \text{ m}$$

1.2. [2pts] Appliquons le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) au point M par rapport au référentiel terrestre galiléen :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{R}$$

où $\vec{P} = -mg \sin \alpha \vec{e}_X - mg \cos \alpha \vec{e}_Z$ est le poids de M, et $\vec{R} = N\vec{e}_Z$ la force de réaction du sol (perpendiculaire au sol car il n'y a pas de frottement).

Écrivons le vecteur vitesse $\vec{v} = v\vec{e}_X$ et projetons le PFD sur $\vec{e}_X$:

$$\frac{dv}{dt} = -g \sin \alpha$$

Intégrons cette équation :

$$v = -g \sin(\alpha) t + v_0$$

Le temps mis pour la montée est donc $t_{1m} = \frac{v_0}{g \sin \alpha}$.

Lors de la descente, l'équation $\frac{dv}{dt} = -g \sin \alpha$ issue du PFD reste inchangée. Elle s'intègre en $v = -g \sin(\alpha) t$ en choisissant l'origine des temps au début de la descente. La durée de descente est la date pour laquelle $v = -v_0$ donc

$$t_{1d} = t_{1m} = \frac{v_0}{g \sin \alpha} \quad \text{AN : } t_{1d} = t_{1m} = 1,49 \text{ s}$$

1.3. [2pts] Notons A le mobile lancé en premier et B l'autre mobile. À la date $t_1/2$, A est au sommet et commence sa descente (vitesse nulle) et B commence sa montée (vitesse v_0). En prenant cette date comme origine des temps, les équations horaires des deux mobiles sont :

$$x_A(t) = -\frac{1}{2}g \sin \alpha t^2 + d \quad \text{et} \quad x_B(t) = -\frac{1}{2}g \sin \alpha t^2 + v_0 t$$

Les deux abscisses sont égales à la date $t = \frac{d}{v_0}$, soit, avec l'origine des dates de l'énoncé, $t = \frac{t_1}{2} + \frac{d}{v_0} = \frac{3v_0}{2g \sin \alpha}$.

On remplace t par $\frac{d}{v_0}$ dans $x_A(t)$ (ou $x_B(t)$) pour obtenir l'abscisse du croisement : $X = \frac{3v_0^2}{8g \sin \alpha} = 2,8 \text{ m}$.

2.1. [2pts] La force de réaction lors de la montée s'écrit $\vec{R} = N\vec{e}_Z - T\vec{e}_X$ avec $T = \mu N$. La projection du PFD sur $\vec{e}_X$ et $\vec{e}_Z$ donne :

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} = -mg \sin \alpha - T \quad \text{et} \quad 0 = -mg \cos \alpha + N$$

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = -g \sin \alpha' \quad \text{avec} \quad \sin \alpha' = \sin \alpha + \mu \cos \alpha$$

La vitesse suivant X est $v = \frac{dX}{dt} = -g \sin \alpha' t + v_0$ et l'abscisse suit la loi horaire $X = -\frac{1}{2}g \sin \alpha' t^2 + v_0 t$.

La vitesse s'annule à $t_{2m} = \frac{v_0}{g \sin \alpha'} = 0,96 \text{ s}$ et l'abscisse correspondant (égale à la distance parcourue) est

$$d_2 = \frac{v_0^2}{2g \sin \alpha'} = 2,4 \text{ m} \quad \text{On retrouve l'expression de la question 1.1. en remplaçant } \alpha \text{ par } \alpha'.$$

2.2. [2pts] Imaginons que le mobile s'arrête au sommet, alors le PFD projeté sur $\vec{e}_X$ et $\vec{e}_Y$ donne

$$T = mg \sin \alpha \quad \text{et} \quad N = mg \cos \alpha$$

La condition d'équilibre est $T < \mu N$ soit $\tan \alpha < \mu$. Or $\tan \alpha = 0,364$ et $\mu = 0,20$ donc cette condition n'est pas satisfaite : une fois au sommet le mobile redescend.

2.3. [2pts] Durant la phase de descente, la composante tangentielle de $\vec{R}$ est orientée vers $\vec{e}_X$ d'où $\vec{R} = N\vec{e}_Z + T\vec{e}_X$ avec $T = \mu N$. La projection du PFD donne donc

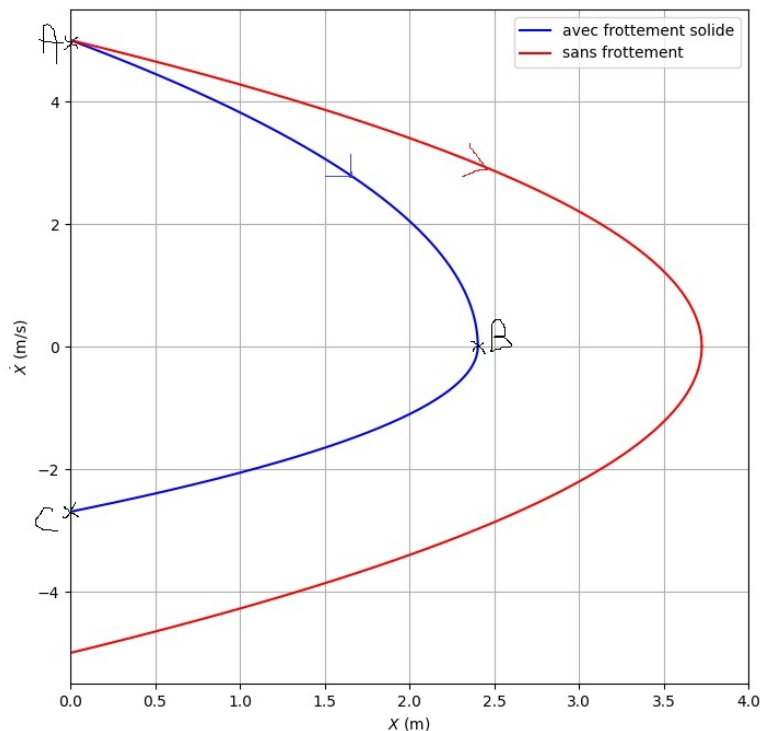
$$\frac{d^2 X}{dt^2} = -g \sin \alpha'' \quad \text{avec} \quad \sin \alpha'' = \sin \alpha - \mu \cos \alpha$$

Prenons $t = 0$ la date où le mobile est au sommet. Lors de la descente son abscisse suit la loi horaire

$$X = -\frac{1}{2}g \sin \alpha'' t^2 + d_2. \quad \text{Le temps de descente est donc} \quad t_{2d} = \sqrt{\frac{2d_2}{g \sin \alpha''}} = \frac{v_0}{g \sqrt{\sin \alpha' \sin \alpha''}} = 1,78 \text{ s} > t_{2m}.$$

Ce dernier résultat est logique car le mouvement de montée est le même qu'un mouvement sans frottement sous une pente $\alpha' > \alpha$ tandis que le mouvement de descente est le même qu'un mouvement sans frottement avec une pente $\alpha'' < \alpha$.

3.1. [2pts]



La montée correspond à la partie AB puisque $\dot{X}$ est positive et la descente à BC car $\dot{X} < 0$.

3.2. [2pts] On voit que pour chaque position X , la vitesse $|\dot{X}|$ est plus faible lors de la descente donc le temps de descente sera plus long.

3.3. [2+2pts] Reprenons les équations horaires obtenues lors de la montée, en posant $g' = g \sin \alpha'$:

$$\dot{X} = -g't + v_0 \quad \text{et} \quad X = -\frac{1}{2}g' t^2 + v_0 t$$

L'équation $X(t)$ peut se réécrire sous forme d'un trinôme :

$$t^2 - \frac{2v_0}{g'}t + \frac{2}{g'}X = 0$$

dont le discriminant est $\Delta = \frac{4v_0^2}{g'^2} - \frac{8X}{g'}$. Sachant que le temps t augmente quand X augmente, on retient la solution :

$$t = \frac{v_0}{g} - \sqrt{\frac{v_0^2}{g'^2} - \frac{2X}{g'}}$$

On injecte cette expression dans celle de $\dot{X}$ pour obtenir l'équation de la portion AB : $\dot{X} = \sqrt{v_0^2 - 2g \sin \alpha' X}$.

Les équations de la descente sont (on pose $g'' = g \sin \alpha''$) :

$$\dot{X} = -g''t \quad \text{et} \quad X = -\frac{1}{2}g''t^2 + d_2$$

On procède de la même façon pour obtenir l'équation de la portion BC : $\dot{X} = -\sqrt{2g \sin \alpha'' (d_2 - X)}$.

3.4. [2pts] Voir figure plus haut.

Si l'on veut les équations de la trajectoire il suffit de remplacer α' et α'' par α et d_2 par d_1 . Sachant que $d_1 = \frac{v_0^2}{2g \sin \alpha}$ on obtient :

$$\dot{X} = \sqrt{v_0^2 - 2gX} \quad \text{pour la montée, et} \quad \dot{X} = -\sqrt{v_0^2 - 2gX} \quad \text{pour la descente}$$

Les deux branches sont symétriques : la descente est identique à la montée par renversement du temps.

3.5. [2pts] Compte-tenu de la remarque précédente, le film passé à l'envers est identique au film réel s'il n'y pas de frottement. S'il y a des frottements alors le temps de montée est différent (plus petit) que le temps de descente donc cela permet de distinguer le film réel du film passé à l'envers.

Quand il y a frottement alors le temps s'écoule dans le sens d'une dissipation spontanée d'énergie.