

## Devoir surveillé n° 5

### CORRIGÉ

**Exercice 1.**

1. On a  $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , d'où  $A^2 = -A$  puis  $A^3 = A$ . On a donc, par récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A^n = (-1)^{n+1}A$ .

2. On raisonne par récurrence : l'égalité voulue est vraie pour  $n = 0$  et  $n = 1$  par définition. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , supposons-la vraie jusqu'au rang  $n$ . Alors :

$$M^{n+1} = (I_3 + 4A)(I_3 + u_n A) = I_3 + (u_n + 4)A + 4u_n A^2 = I_3 + (4 - 3u_n)A = I_3 + u_{n+1}A.$$

L'égalité est donc vraie au rang  $n + 1$ , donc, par récurrence, est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

3. La suite  $(u_n)$  est une suite arithmético-géométrique, de point fixe  $k$  tel que  $k = 4 - 3k$ , c'est-à-dire  $k = 1$ . La suite  $(u_n - 1)$  est donc géométrique de raison  $-3$ , d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (-3)^n(u_0 - 1) + 1 = 1 - (-3)^n.$$

Donc :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $M^n = I_3 + (1 - (-3)^n)A$ .

4. On peut utiliser la méthode du pivot, ou directement essayer avec la formule ci-dessus : pour  $n = -1$ ,  $I_3 + (1 - (-3)^n)A = I_3 + \frac{4}{3}A$ , et :

$$M \cdot \left( I_3 + \frac{4}{3}A \right) = (I_3 + 4A) \left( I_3 + \frac{4}{3}A \right) = I_3 + \frac{16}{3}A + \frac{16}{3}A^2 = I_3 \quad \text{puisque } A^2 = -A,$$

donc  $M$  est inversible et  $M^{-1} = I_3 + \frac{4}{3}A$ . La formule est donc valable pour  $n = -1$  !

## Exercice 2.

1. Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ . Comme  $X^3$  est scindé, de racine triple 0,  $P$  est solution si et seulement si 0 est racine triple de  $Q$ , c'est-à-dire si :  $\forall k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket, Q^{(k)}(0) = 0$ .
2. Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . On a  $(P(2X))^{(k)} = 2^k P^{(k)}(2X)$  donc, d'après la formule de Leibniz appliquée au produit  $P \times P$  :

$$Q^{(k)}(X) = 2^k P^{(k)}(2X) - 2 \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} P^{(j)}(X) P^{(k-j)}(X).$$

Par conséquent :  $Q^{(k)}(0) = 2^k P^{(k)}(0) - 2 \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} P^{(j)}(0) P^{(k-j)}(0)$ .

3. On a vu que  $P$  est solution si et seulement si  $Q(0) = Q'(0) = Q''(0) = 0$ . Or, d'après la question précédente :

$$\begin{cases} Q(0) &= P(0) - 2P(0)^2 + 1 \\ Q'(0) &= 2P'(0) - 4P(0)P'(0) \\ Q''(0) &= 4P''(0) - 4P(0)P''(0) - 4P'(0)^2 \end{cases},$$

donc, si  $P$  est solution, alors  $P(0)$  est racine du polynôme  $-2X^2 + X + 1$ , donc  $P(0) = 1$  ou  $-\frac{1}{2}$ . Si  $P(0) = -\frac{1}{2}$ , alors d'après le système ci-dessus,  $P'(0) = P''(0) = 0$ ; et si  $P(0) = 1$ , alors  $P'(0) = 0$  et il n'y a pas de contrainte sur  $P''(0)$  :  $P''(0) \in \mathbb{R}$ .

4. Remarquons que  $P = 0$  n'est pas solution. Notons alors  $n \in \mathbb{N}$  le degré de  $P$ . D'après la formule de Taylor :

$$P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k,$$

donc d'après la question précédente :

- soit  $P(0) = -\frac{1}{2}$ , et alors  $P = -\frac{1}{2} + \sum_{k=3}^n \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k = X^3 Q_1(X) - \frac{1}{2}$ , où  $Q_1 \in \mathbb{R}[X]$ ,
- soit  $P(0) = 1$ , et alors  $P = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k = X^2 Q_2(X) + 1$ , où  $Q_2 \in \mathbb{R}[X]$ .

Réciproquement, tous les polynômes de cette forme sont solution.

### Exercice 3.

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . La fonction  $f_n$  est polynomiale, donc usuellement dérivable sur  $\mathbb{R}$ , avec :  $\forall x \in \mathbb{R}, f'_n(x) = 3x^2 + n > 0$  (sauf dans le cas  $x = n = 0$ ). Donc  $f_n$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . Comme de plus  $f_n$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , d'après le théorème de la bijection continue,  $f_n$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  dans

$$f_n(\mathbb{R}) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) \right[ = \mathbb{R}.$$

En particulier, la fonction  $f_n$  s'annule exactement une fois sur  $\mathbb{R}$ .

2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a  $f_n(-1) = -1 < 0$  et  $f_n(0) = n \geq 0$ , donc, comme  $f$  est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires,  $u_n \in [-1, 0]$ .
3. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a  $f_{n+1}(u_n) = u_n^3 + (n+1)u_n + (n+1) = f_n(u_n) + u_n + 1 = u_n + 1$ . Donc, comme  $u_n \geq -1$ ,  $f_{n+1}(u_n) \geq 0 = f_{n+1}(u_{n+1})$ . Donc, comme  $f_{n+1}$  est croissante,  $u_n \geq u_{n+1}$ . Donc  $(u_n)$  est décroissante.

4. On a montré que la suite  $(u_n)$  est décroissante et minorée par  $-1$ , donc elle converge vers un réel  $l \geq -1$ . De plus :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n^3 = -n(u_n + 1)$ , donc si  $l > -1$ , alors  $u_n^3 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$ , ce qui est absurde. Donc  $l = -1$ .

5. Comme on l'a dit :  $\forall n \in \mathbb{N}, n(u_n + 1) = -u_n^3 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$ , donc  $u_n + 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ .

6. On sait déjà que  $u_n = -1 + \frac{1}{n} + o_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n} \right)$ . Donc  $u_n^3 = -1 + \frac{3}{n} + o_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n} \right)$ , donc :

$$u_n = -1 - \frac{u_n^3}{n} = -1 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + o_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n^2} \right).$$

*On peut poursuivre de la même manière ce développement asymptotique pour montrer que :*

$$u_n = -1 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{12}{n^3} - \frac{37}{n^4} + \frac{147}{n^5} + o_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n^5} \right).$$

## Problème.

- I. 1. Par récurrence : on sait que  $u_0 > 0$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ , supposons que  $u_n > 0$ . Alors  $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n^2} > 0$ . Donc, par récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ .
2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Comme  $u_n > 0$ ,  $1 + u_n^2 > 1$ , donc  $u_{n+1} < u_n$ . La suite  $(u_n)$  est donc décroissante.
3. La suite  $(u_n)$  est décroissante et minorée par 0, donc converge vers  $l \geq 0$  d'après le théorème de la limite monotone. Par passage à la limite, on a  $l = \frac{l}{1 + l^2}$ , donc  $l = 0$  ou  $1 + l^2 = 1$ , donc  $l = 0$ .

II. 1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a  $v_n = \frac{(1 + u_n^2)^2}{u_n^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{2u_n^2 + u_n^4}{u_n^2} = 2 + u_n^2$ .

2. Comme la suite  $(u_n)$  est décroissante vers 0, d'après la question précédente, la suite  $(v_n)$  est décroissante et converge vers 2.

III. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. On a

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \frac{v_0 + v_1 + \dots + v_n}{n+1} - \frac{v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}}{n} \\ &= \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) (v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}) + \frac{v_n}{n+1} \\ &= \frac{nv_n - (v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1})}{n(n+1)} \\ &= \frac{1}{n(n+1)} ((v_n - v_0) + (v_n - v_1) + \dots + (v_n - v_{n-1})). \end{aligned}$$

Comme la suite  $(v_n)$  est décroissante, on a :  $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, v_n - v_k \leq 0$ , donc  $w_{n+1} - w_n \leq 0$ . Donc la suite  $(w_n)$  est décroissante.

2. On sait que :  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, v_k \geq 2$ , donc  $v_0 + \dots + v_{n-1} \geq 2n$ , donc  $w_n \geq 2$ . Donc la suite  $(w_n)$  est décroissante et minorée par 2, donc converge vers  $l \geq 2$ .
3. On a :

$$2w_{2n} - w_n = 2 \frac{v_0 + \dots + v_{2n-1}}{2n} - \frac{v_0 + \dots + v_{n-1}}{n} = \frac{v_n + \dots + v_{2n-1}}{n},$$

où, comme  $(v_n)$  est décroissante :  $\forall k \in \llbracket n, 2n-1 \rrbracket, v_k \leq v_n$ , donc  $2w_{2n} - w_n \leq \frac{nv_n}{n} = v_n$ .  
Donc, par passage à la limite,  $2l - l \leq 2$ , donc  $l \leq 2$ . Comme on sait également que  $l \geq 2$ , on a donc  $l = 2$ .

*La suite  $(v_n)$  et la "suite de ses moyennes"  $(w_n)$  ont donc la même limite. C'est un fait général, connu sous le nom de lemme de Cesàro.*

IV. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. Par somme télescopique,  $v_0 + \dots + v_{n-1} = \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2}$ , donc  $w_n = \frac{1}{nu_n^2} - \frac{1}{nu_0^2}$ .

2. On a  $\frac{1}{nu_n^2} = w_n + \frac{1}{nu_0^2} \rightarrow 2$ , donc  $nu_n^2 \rightarrow \frac{1}{2}$ .

3. On a  $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{1 + u_n^2} - u_n = -\frac{u_n^3}{1 + u_n^2} \sim -u_n^3$ , donc  $n^\alpha(u_{n+1} - u_n) \sim -(n^{\frac{2\alpha}{3}} u_n^2)^{\frac{3}{2}}$ . Pour  $\alpha = \frac{3}{2}$ , on a donc  $n^\alpha(u_{n+1} - u_n) \sim -(nu_n^2)^{\frac{3}{2}}$ , donc  $n^\alpha(u_{n+1} - u_n) \rightarrow -\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ .