Feuille d'exercices 13
ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Exercice 1.

(e) $\dfrac{2x}{x\sqrt{x}+3} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

(f) $\dfrac{\sqrt{x}-\ln x}{x+\ln x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

(g) $x\left(e^{\frac{1}{x}}+e^{\frac{2}{x}}-2\right) = x(e^{\frac{1}{x}}-1)+x(e^{\frac{2}{x}}-2)$, où $x(e^{\frac{1}{x}}-1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{x}=1$ et $x(e^{\frac{2}{x}}-1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{2x}{x}=2$, donc $x\left(e^{\frac{1}{x}}+e^{\frac{2}{x}}-2\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1+2=3$,

(h) $\dfrac{\tan 5x}{\sin 2x} \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{5x}{2x}=\dfrac{5}{2}$,

(i) $\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3} = \dfrac{\sin x}{x}\dfrac{1-\cos x}{x^2\cos x} \underset{x\to0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$,

(j) $(\sin x)\left(\sin\dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to0}{\sim} x\sin\dfrac{1}{x} \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$,

(k) $\forall x\in\mathbb{R},\ \sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x} = 2\cos\left(\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right)$
$= 2\cos\left(\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right)\sin\left(\dfrac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

(l) $\forall x>0,\ 0\leq \dfrac{x-\lfloor x\rfloor}{x+\lfloor x\rfloor} \leq \dfrac{1}{2\lfloor x\rfloor}$, donc par encadrement : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\lfloor x\rfloor}{x+\lfloor x\rfloor}=0$.

Exercice 2.

(d) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{1}{x}$,

(e) $x^{\sin x}-1 \underset{x\to0}{\sim} \sin(x)\ln(x) \underset{x\to0}{\sim} x\ln(x)$,

(f) $\cos\sqrt{x}-1 \underset{x\to0}{\sim} -\dfrac{x}{2}$,

(g) $f(x)=\sqrt{\ln(x+1)}-\sqrt{|\ln x|} \underset{x\to0}{\sim} -\sqrt{|\ln x|}$.

Exercice 4.

(a) $\dfrac{x^2+6x-5}{7x^2-2x-3} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{7x^2}=\dfrac{1}{7}, \quad \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{5}{3}$,

(b) $2^{3x}+3^{2x}=8^x+9^x \underset{x\to+\infty}{\sim} 9^x, \quad \underset{x\to0}{\sim} 1+1=2$,

(c) $x^2 2^x-\dfrac{3^x}{x^3} \underset{x\to+\infty}{\sim} -\dfrac{3^x}{x^3}, \quad \underset{x\to0}{\sim} -\dfrac{1}{x^3}$,

(d) $\sqrt{x^2+5} \underset{x\to+\infty}{\sim} x, \quad \underset{x\to0}{\sim} \sqrt{5}$,

(e) $\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{(x+1)^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}, \quad \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{2}{x^2}$,

(f) $e^{2x^2-3+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^4}} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{2x^2-3}, \quad \underset{x\to0}{\sim} e^{-3+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^4}}$,

(g) $x^2\ln(x)^3 - x^3\ln(x)^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} -x^3\ln(x)^2, \quad \underset{x\to0}{\sim} x^2\ln(x)^3,$

(h) $e^{\frac{1}{x}}x^5\ln(x) - e^x x^4\ln(x)^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} -e^x x^4\ln(x)^2, \quad \underset{x\to0}{\sim} e^{\frac{1}{x}}x^5\ln(x),$

(i) $\dfrac{x^2+\ln(x)}{x^2\ln(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{x^2\ln(x)} = \dfrac{1}{\ln x}, \quad \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{\ln(x)}{x^2\ln(x)} = \dfrac{1}{x^2}.$

Exercice 5.

(a) Vrai : notons $h(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$; comme $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$, $h(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 1$. Alors : $g(x) = h(x)f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 1\times l = l$.

(b) Faux : par exemple, $x \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$ et $x^2 \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$, mais $x \underset{x\to0}{\not\sim} x^2$. L'assertion est cependant vraie si $l \neq 0$.

(c) Faux : par exemple, pour $f(x) = 5x + \sqrt{x}$: $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 5x$, mais $f(x) - 5x = \sqrt{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(d) Faux : par exemple, $x \underset{x\to+\infty}{\sim} x+1$, mais $e^x \underset{x\to+\infty}{\not\sim} e^{x+1}$.

Exercice 6. Comme f est polynomiale, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Si f' est nulle, alors f est constante, donc monotone.
Supposons f' non nulle ; on peut alors supposer que $a_d \neq 0$. Traitons le cas $a_d > 0$. On a : $f'(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} da_dx^{d-1}$.
Or $da_dx^{d-1} > 0$ au voisinage de $+\infty$, donc, par équivalence, $f'(x) > 0$ au voisinage de $+\infty$. Donc f est strictement croissante au voisinage de $+\infty$. De même, si $a_d < 0$, alors f est strictement décroissante au voisinage de $+\infty$.
Dans tous les cas, f est donc monotone au voisinage de $+\infty$.

Exercice 7. On a $\dfrac{\ln f(x)}{\ln g(x)} - 1 = \dfrac{\ln f(x) - \ln g(x)}{\ln g(x)} = \dfrac{\ln \frac{f(x)}{g(x)}}{\ln g(x)}$.
Donc $\dfrac{\ln f(x)}{\ln g(x)} - 1 \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \dfrac{\ln 1}{\ln l} = 0$, donc $\dfrac{\ln f(x)}{\ln g(x)} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 1$. Donc $\ln f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \ln g(x)$.
C'est faux pour $l = 1$. Par exemple : $x+1 \underset{x\to0}{\sim} x^2+1$, mais $\ln(x+1) \underset{x\to0}{\sim} x \underset{x\to0}{\not\sim} \ln(x^2+1) \underset{x\to0}{\sim} x^2$.

Exercice 8.

(d) $D_f = \mathbb{R}^*$. On a : $e^{\frac{1}{x}} \underset{x\to0^-}{\longrightarrow} 0$ et $e^{\frac{1}{x}} \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} +\infty$, et $\sin\dfrac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0, donc f n'a pas de limite (à droite) en 0. Donc f n'est pas prolongeable par continuité.

(e) $f(x) = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$ donc $D_f =]-1,0[\cup]0,+\infty[$.
On a : $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to0}{\longrightarrow} 1$, donc $f(x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} e$, donc f est prolongeable par continuité en 0 avec $\tilde{f}(0) = e$.
De plus : $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to-1^+}{\longrightarrow} -\infty$, donc $f(x) \underset{x\to-1^+}{\longrightarrow} 0$, donc f est prolongeable par continuité en -1 avec $\tilde{f}(-1) = 0$.

(f) f est 2π-périodique et $D_f \cap [0,2\pi] = [0,2\pi] \setminus \left\{\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right\}$.
On a : $f(x) \underset{x\to\frac{\pi}{4}}{\longrightarrow} \sqrt{2}\dfrac{\sin'\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\tan'\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \dfrac{1}{2}$, donc f est prolongeable par continuité en $\dfrac{\pi}{4}$ avec $\tilde{f}\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$.
De plus : $\sqrt{2}\sin(x) - 1 \underset{x\to\frac{5\pi}{4}}{\longrightarrow} -2$ et $\tan x - 1 \underset{x\to\frac{5\pi}{4}^{\pm}}{\longrightarrow} 0^{\pm}$, donc f n'a pas de limite en $\dfrac{5\pi}{4}$. Donc f n'est pas prolongeable par continuité en $\dfrac{5\pi}{4}$.

(g) $D_f = \mathbb{R}^*$, et f n'a pas de limite en 0, donc f n'est pas prolongeable par continuité en 0.

(h) $D_f = \mathbb{R}^*$, et $f(x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$, donc f est prolongeable par continuité en 0 avec $\tilde{f}(0) = 0$.

(i) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Or $f(x) \underset{x\to -1}{\sim} (1+x)\ln|1+x| \underset{x\to -1}{\longrightarrow} 0$, donc f est prolongeable par continuité en -1 avec $\tilde{f}(-1) = 0$.

Exercice 10. Soit $x \in \mathbb{R}$. Le nombre $f(x)$ existe lorsque $\tan(x)$ existe, c'est-à-dire que $D_f = \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$. La fonction f est alors continue sur D_f comme composée de fonctions usuellement continues. De plus, f est π-périodique ; il suffit donc, pour montrer que f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$, de montrer que f est prolongeable en $\frac{\pi}{2}$.

On a : $\tan^2(x) \underset{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x \neq \frac{\pi}{2}}}{\longrightarrow} +\infty$, donc $f(x) \underset{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x \neq \frac{\pi}{2}}}{\longrightarrow} \lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$. Donc f se prolonge par continuité en $\frac{\pi}{2}$ avec $\tilde{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$. Donc f est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11. On raisonne par analyse-synthèse. Supposons qu'il existe une solution f.
On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$.
Or : $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x) = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)$, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{f(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{2}\frac{f\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{4}\frac{f\left(\frac{x}{4}\right)}{\sin\left(\frac{x}{4}\right)} = \cdots = \frac{1}{2^n}\frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{f(0)}{x}, \text{ donc } f(x) = f(0)\frac{\sin(x)}{x}.$$

Réciproquement, toute fonction $f : x \mapsto \lambda\frac{\sin(x)}{x}$ est solution.

Exercice 12.

- Soit $a = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Soit (u_n) une suite d'irrationnels convergente vers a, alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(u_n) = 0$, donc $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \neq f(a) = \frac{1}{q}$. Donc f n'est pas continue en a.
- Soit $a \notin \mathbb{Q}$. Soit (u_n) une suite convergente vers a. Alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(u_n) = 0$ si u_n est irrationnel, et $f(u_n) = \frac{1}{q_n}$ si $u_n = \frac{p_n}{q_n} \in \mathbb{Q}$. S'il y a un nombre fini de u_n rationnels, on a directement $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 = f(a)$. Sinon, considérons la suite (q_n), il suffit de montrer que $q_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

  Soit $q \in \mathbb{N}^*$, il existe au plus un $p \in \mathbb{Z}$ tel que $\left|a - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q}$; c'est-à-dire qu'il existe un nombre fini de rationnels de dénominateur q proches de a. Comme (u_n) converge vers a, cette suite contient donc un nombre fini de rationnels de dénominateur q. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N,\ q_n \geq q$. Donc : $q_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
  Donc f est continue en a.

Exercice 13. Soit $a \in \mathbb{Q}$. Comme $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite (x_n) d'irrationnels convergente vers a. Alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x_n) = x_n + 1$, donc $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a + 1 \neq f(a) = a - 1$. Donc f n'est pas continue en a.
De même si $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Donc f est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.

Exercice 15. Soit $a \in \mathbb{R}$. Il suffit de montrer que $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$.
On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x) - f(a)| \leq k|x - a|$.
Or : $|x - a| \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$, donc, par encadrement : $|f(x) - f(a)| \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$, c'est-à-dire que $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$.
Donc f est continue en a.
Donc f est continue.

Exercice 18. Comme f est bornée, $f \circ g$ est directement bornée.
Soit C une borne de f, alors $g \circ f(\mathbb{R}) \subset g([-C, C])$. Or, comme g est continue, d'après le théorème de Weierstrass, g est bornée sur $[-C, C]$. Donc $g \circ f$ est bornée.

Exercice 20. Comme $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ et que f est continue, d'après le TVI, f est surjective ; de plus, soient $x_1, x_2 \in [0, 1]$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$, alors $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$ donc $x_1 = x_2$, donc f est injective. Donc f est bijective.
L'équation de départ s'écrit alors : $\forall x \in [0, 1],\ f(x) = f^{-1}(x)$. Comme $f = f^{-1}$, la courbe de f est symétrique par rapport à la droite $y = x$; en particulier, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$.
Le même raisonnement peut alors être appliqué sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, d'où $f\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{4}$. Par récurrence, on a : $\forall p, q \in \mathbb{N},\ f\left(\dfrac{p}{2^q}\right) = \dfrac{p}{2^q}$. Comme f est continue, on a finalement : $\forall x \in [0, 1],\ f(x) = x$, c'est-à-dire : $f = \mathrm{Id}_{[0,1]}$.

Exercice 21.

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $f(x)^2 = f(x)$, on a $f(x) = 0$ ou $f(x) = 1$. Donc, d'après l'exercice 19, la fonction f est constante égale à 0 ou constante égale à 1.

(b) La fonction f est directement paire, et : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = f(x^{\frac{1}{2^n}})$. Or : $x^{\frac{1}{2^n}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$, donc, comme f est continue : $f(x) = f(1)$. Donc f est constante sur $\mathbb{R}$. Réciproquement, toute fonction constante est solution.

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $u_0 = x$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2}$. Alors (u_n) converge vers 1 et : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = f(u_n)$ donc, comme f est continue, $f(x) = f(1)$. Donc f est constante sur $\mathbb{R}$. Réciproquement, toute fonction constante est solution.

(d) On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(nx) = nf(x)$, donc, en notant $a = f(1)$: $f(n) = na$, puis : $\forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*,\ f\left(\dfrac{p}{q}\right) = a\dfrac{p}{q}$ donc, comme f est continue : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax$. Réciproquement, toute fonction $x \mapsto ax$, $a \in \mathbb{R}$, est solution.

(e) Notons $g(x) = \ln(f(e^x))$, alors : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ g(x + y) = g(x) + g(y)$ donc, d'après le résultat précédent, $g(x) = ax$, donc $f(x) = x^a$, $a \in \mathbb{R}$. Réciproquement, toute fonction $x \mapsto x^a$, $a \in \mathbb{R}$, est solution.

(f) Notons $g(x) = \ln(f(x))$. Alors : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ g\left(\dfrac{x + y}{2}\right) = \dfrac{g(x) + g(y)}{2}$, donc g est affine ; donc $f(x) = e^{ax+b}$. Réciproquement, toute fonction $x \mapsto e^{ax+b},\ a, b \in \mathbb{R}$, est solution.