

Devoir Libre 5 : Correction

Exercice 1 : Au temps des mayas [24 pts]

1. [1pt] D'après la photo, une partie de la Lune orientée vers l'ouest est faiblement éclairée et se situe donc dans la zone de pénombre. L'autre partie est sombre donc se trouve dans la zone d'ombre. La photographie a donc été prise entre les positions 3 et 4.

2. [2pts] Pour une fente de largeur a , le demi-angle de diffraction est $\theta = \lambda/a$ si l'angle est faible.

Appliquons cette forme avec $a = 2R_T$. Le demi-angle de diffraction est :

$$\theta = \frac{\lambda}{2R} = \frac{5,0 \times 10^{-7}}{2 \times 6,4 \times 10^6} \simeq 0,5 \times 10^{-13} \text{ rad}$$

Au niveau de la Lune située à une distance r_L de la Terre, la largeur de la tache de diffraction est :

$$L = 2r_L \theta \Rightarrow L \simeq 3,8 \times 10^{-5} \text{ m}$$

Cette largeur est négligeable : la Lune ne peut être éclairée par la diffraction de la lumière solaire par la Terre.

21. [2pts] Le signal reçu au point S_n est retardé de d_n/c_s par rapport au signal émis en S :

$$\psi(S_n, t) = \psi\left(S, t - \frac{d_n}{c_s}\right) = s\left(t - \frac{d_n}{c_s}\right)$$

Le signal réfléchi en S par S_n est retardé de d_n/c_s par rapport au signal réfléchi en S_n :

$$\psi'(S, t) = \kappa \psi\left(S_n, t - \frac{d_n}{c_s}\right) = \kappa s\left(t - \frac{2d_n}{c_s}\right)$$

22. [2pts] **Remarque :** le signal s_ω défini par la relation ci-dessous est relié à la transformée de Fourier de $s(t)$

$$s(t) = \int_{\omega} s_\omega(t) d\omega$$

D'après la question 21, si $s(t) = A \cos(\omega t)$ alors $\psi'(S, t) = A\kappa \cos\left(\omega t - \frac{2\omega d_n}{c_s}\right)$.

La phase associée vaut donc $\phi'_n(t) = \omega t - \frac{2\omega d_n}{c_s} = \phi(t) - \frac{2\omega d_n}{c_s}$.

23. [2pts] La différence de phase en S entre l'onde retour diffractée en S_n et l'onde retour diffractée en S_{n+1} est :

$$\Delta\phi'_n = \phi'_n(t) - \phi'_{n+1}(t) = \phi(t) - \frac{2\omega d_n}{c_s} - \phi(t) + \frac{2\omega d_{n+1}}{c_s}$$

$$\Delta\phi'_n = \frac{2\omega}{c_s}(d_{n+1} - d_n)$$

24. [2pts] La condition d'interférences constructives est :

$$\Delta\phi'_n = 2\pi m \quad \text{où } m \in \mathbb{Z} \quad \text{soit} \quad \frac{2\omega}{c_s}(d_{n+1} - d_n) = 2\pi m$$

Or $\omega = 2\pi\nu$ donc les fréquences correspondantes vérifient :

$$\nu_m = \frac{mc_s}{2(d_{n+1} - d_n)} \quad \text{où } m \in \mathbb{N}^* \quad \text{car } \nu > 0 \quad \text{et } d_{n+1} > d_n$$

25. [1+2pts] Par application du théorème de Pythagore, $d_n = \sqrt{(a + nb)^2 + (nb)^2}$.

On calcule alors $d_{n+1}^2 - d_n^2 = 2ab + 2(2n + 1)b^2$.

Or :

$$d_{n+1}^2 - d_n^2 = (d_{n+1} + d_n) \times (d_{n+1} - d_n) \simeq 2d_n (d_{n+1} - d_n)$$

Donc :

$$d_{n+1} - d_n \approx \frac{ab + (2n + 1)b^2}{d_n}$$

On obtient alors $\nu_1 \simeq \frac{c_s g(n) d_n}{2ab}$ où $g(n) = 1/(1 + (2n + 1)b/a)$.

26. [1+2pts] La plus grande valeur de d_n sur le graphe est $d_N = 50 \text{ m}$.

La date d'arrivée du début de l'écho en S est $t_1 = \frac{2d_1}{c_s} \simeq \frac{2a}{c_s} = \frac{40 \text{ m}}{340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} = 0,11 \text{ s}$

La date de fin de l'écho est $t_N = \frac{2d_{91}}{c_s} = \frac{100 \text{ m}}{340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} = 0,29 \text{ s}$

La durée de l'écho est donc $\Delta t = t_N - t_1 = 0,18 \text{ s}$.

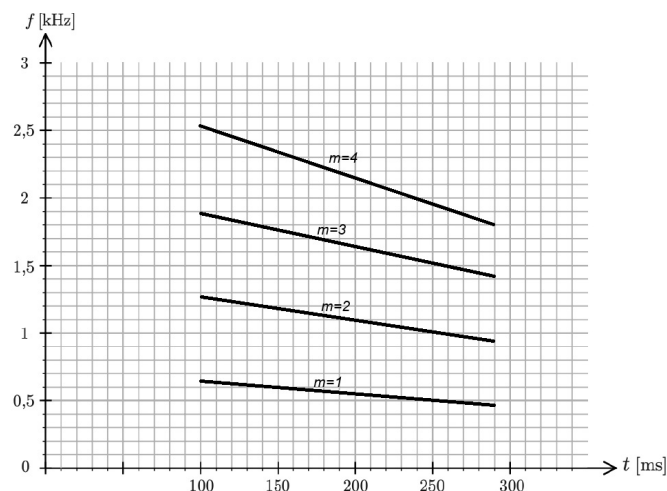
27. [2pts] À la date t_1 le signal en S résulte de la superposition des signaux diffractés par les marches 0 et 1. La fréquence du fondamental vaut alors

$$\nu_1 = \frac{c_s}{2ab} g(1) d_1 = \frac{340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{2 \times 20 \text{ m} \times 0,263 \text{ m}} \times 19,5 \text{ m} = 630 \text{ Hz}$$

À l'instant final t_N , elle vaut donc

$$\nu_1 = \frac{c_s}{2ab} g(91) d_{91} = \frac{340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{2 \times 20 \text{ m} \times 0,263 \text{ m}} \times 14,7 \text{ m} = 475 \text{ Hz}$$

28. [3pts]



29. [2pts] Le spectre fréquentiel calculé ressemble à celui mesuré et représenté figure 10. On retrouve bien

- un fondamental $m = 1$ dont la fréquence diminue avec le temps,
- des harmoniques régulièrement espacées,
- une décroissance de l'amplitude avec m ,

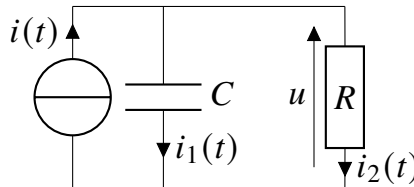
On peut supposer que pour un oiseau adulte le son produit est plus grave (cavité résonante plus grande favorisant les grandes longueurs d'onde donc les fréquences plus faibles) donc l'écart de fréquences diminue puisque les harmoniques ont des fréquences multiples du fondamental.

Exercice 2 : Succession de filtres détecteur pyroélectrique [20 pts]

1. [2pts] Les équations linéaires (1) et (2) sont vérifiées par les grandeurs complexes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_1 \frac{d\theta(t)}{dt} + \theta(t) = \frac{\tau_1}{c} \phi_a(t) \\ i(t) = S_p \frac{d\theta(t)}{dt} \end{array} \right. \iff \boxed{\left\{ \begin{array}{l} \theta(t) (1 + j\omega\tau_1) = \frac{\tau_1}{c} \phi_a(t) \quad (1)' \\ i(t) = S_p j\omega \theta(t) \quad (2)' \end{array} \right.}$$

2. [2pts]



$$\underline{H}_3(j\omega) = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)}$$

Or $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$ soit $i(t) = C \frac{du(t)}{dt} + \frac{u(t)}{R}$. En complexe : $\underline{i}(t) = \left(\frac{1}{R} + jC\omega \right) \underline{u}(t)$.

$$\boxed{\underline{H}_3(j\omega) = \frac{R}{1 + j\omega\tau_3} \quad \text{où} \quad \tau_3 = RC}$$

Il s'agit d'un filtre passe-bas du 1^{er} ordre.

Remarque : on peut aussi calculer $\underline{H}_3(j\omega)$ en remarquant que cette fonction de transfert est égale à l'impédance équivalente à l'association en dérivation du condensateur et du résistor.

3. [2pts] Chaîne fonctionnelle (rappel : $\phi(t) = \phi_a(t) + \phi_0$ et $T(t) = \theta(t) + T_0$) :

$$\boxed{\underline{\phi}_a(t) \xrightarrow{F_1} \underline{\theta}(t) \xrightarrow{F_2} \underline{i}(t) \xrightarrow{F_3} \underline{u}(t)}$$

4. [2pts]

$$\boxed{\underline{H}_1(j\omega) = \frac{\underline{\theta}(t)}{\underline{\phi}_a(t)} = \frac{\tau_1/c}{1 + j\omega\tau_1} \quad F_1 \text{ est un filtre passe-bas du 1^{er} ordre}}$$

5. [2pts]

$$\boxed{\underline{H}_2(j\omega) = \frac{\underline{i}(t)}{\underline{\theta}(t)} = S_p j\omega \quad F_2 \text{ est un filtre dérivateur}}$$

6. [2+2pts]

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{\phi}_a(t)} = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)} \frac{\underline{i}(t)}{\underline{\theta}(t)} \frac{\underline{\theta}(t)}{\underline{\phi}_a(t)} = \underline{H}_3(j\omega) \underline{H}_2(j\omega) \underline{H}_1(j\omega)$$

Donc

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{R}{1 + j\omega\tau_3} \cdot (S_p j\omega) \cdot \frac{\tau_1/c}{1 + j\omega\tau_1} = \frac{RS_p}{c} \tau_1 \frac{j\omega}{(1 + j\omega\tau_1)(1 + j\omega\tau_3)}$$

Mise sous une forme « passe-bande d'ordre 2 » :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{RS_p}{c} \frac{\tau_1}{\tau_1 + \tau_3} \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega(\tau_1 + \tau_3)} + j\omega \frac{\tau_1\tau_3}{\tau_1 + \tau_3}} = \frac{H_0}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)}$$

Avec

$$\boxed{x = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\tau_1\tau_3}}, \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{\tau_1\tau_3}}, \quad Q = \frac{\sqrt{\tau_1\tau_3}}{\tau_1 + \tau_3}, \quad H_0 = \frac{RS_p}{c} \frac{\tau_1}{\tau_1 + \tau_3}}$$

7. [2pts] D'après le graphe : $f_{\text{exp}} = 0,3 \text{ Hz}$.

$$f_{0,\text{th}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\tau_1\tau_3}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{0,159 \times 1,49}} \simeq 0,33 \text{ Hz} \quad \text{donc bon accord}$$

$$H_{0,\text{exp}} = H(x = 1) = H(f = f_0) = 5 \cdot 10^3 \text{ V} \cdot \text{W}^{-1}.$$

$$H_{0,\text{th}} = \frac{RpS}{c} \frac{\tau_1}{\tau_1 + \tau_3} = \frac{24 \cdot 10^2 \times 17 \cdot 10^{-5} \times 9150 \times 4 \cdot 10^{-6}}{3,1 \cdot 10^{-4} (0,159 + 1,49)} \simeq 5 \cdot 10^3 \text{ V} \cdot \text{W}^{-1}$$

8. [2+2pts] Pour $x \gg 1$:

$$\underline{H}(jx) \simeq \frac{H_0}{jQx} \Rightarrow G_{\text{dB}} = 20 \log\left(\frac{H_0}{Q}\right) - 20 \log(x)$$

Pour $x \ll 1$:

$$\underline{H}(jx) \simeq -\frac{H_0 x}{jQ} \Rightarrow G_{\text{dB}} = 20 \log\left(\frac{H_0}{Q}\right) + 20 \log(x)$$

Graphiquement, on a représenté $G = |H|$ en fonction de f en échelles log (en ordonnée et en abscisse). Ainsi :

$$\log G = \log\left(\frac{H_0}{Q}\right) \pm \log x,$$

donc le coefficient directeur vaut ± 1 conformément à ce qui est observé.

L'intersection des asymptotes se fait au point d'abscisse $f = f_0$ et d'ordonnée $\log\left(\frac{H_0}{Q}\right)$.

Graphiquement cette ordonnée est égale à 3,9 donc $\log\left(\frac{H_0}{Q}\right) \simeq 3,9$ et par suite

$$Q_{\text{exp}} = \frac{H_0}{10^{3,9}} = 0,55$$

La valeur théorique est $Q_{th} = \frac{\sqrt{\tau_1\tau_2}}{\tau_1 + \tau_2} = 0,29$. La différence peut s'expliquer par les limites du modèle utilisé : flux lumineux uniforme sur le capteur, capacité thermique du matériau constante, ...