Feuille d'exercices 14
ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Exercice 2.

(a) $D_f = D'_f = R^*$. $\forall x \in D'_f,\ f'(x) = \dfrac{-4xe^{x^2}}{(e^{x^2}-1)^2}$.

(b) $D_g = D'_g = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\ (2\pi)$. $\forall x \in D'_g,\ g'(x) = \left(\cos(x)\ln(\cos x) - \dfrac{\sin^2(x)}{\cos(x)}\right)(\cos x)^{\sin x}$.

(c) $D_h = [-1, 1],\ D'_h =]-1, 0[\cup]0, 1[$. $\forall x \in D'_h,\ h'(x) = \dfrac{x}{|x|}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(d) $D_i = D'_i =]0, \pi[\ (\pi)$. $\forall x \in D'_i,\ i'(x) = -\dfrac{1}{\sin(x)}$.

(e) $D_j = D'_j = \mathbb{R}$. $\forall x \in D'_j,\ j'(x) = \dfrac{1}{\text{ch }(x)}$.

(f) $D_k = D'_k = \left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[\ \left(\dfrac{\pi}{4}\right)$. $\forall x \in D'_k,\ k'(x) = \dfrac{1+\tan^2 x}{\tan x}$.

(g) $D_l = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, $D'_l =]-\sqrt{2}, 0[\cup]0, \sqrt{2}[$. $\forall x \in D'_l,\ l'(x) = -\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2-x^4}}$.

(h) $D_m = \mathbb{R}$, $D'_m = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. $\forall x \in D'_m,\ m'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-\lfloor x\rfloor}}$.

(i) $D_n = [-1, 1]$, $D'_n =]-1, 1[$. $\forall x \in D'_n,\ n'(x) = \dfrac{1}{1-x^2+\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 3.

(d) La fonction j est 2π-périodique ; on l'étudie donc sur $[0, 2\pi]$. Sur cet intervalle, j est définie lorsque $\sin x \neq 0$, c'est-à-dire lorsque $x \neq 0$ ou π.

En 0 : $j(x) = x\dfrac{1-\cos x}{x^2}\dfrac{x}{\sin x} \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{\longrightarrow} 0$, donc j est prolongeable par continuité en 0 en une fonction $\tilde{j}$ telle que $\tilde{j}(0) = 0$.

En π : $j(x) \underset{x\to\pi}{\sim} \dfrac{2}{\sin x} \underset{\substack{x\to \pi\\ x\neq \pi}}{\longrightarrow} \pm\infty$, donc j n'est pas prolongeable par continuité en π.

On a de plus en 0 : $\forall x \neq 0,\ \dfrac{\tilde{j}(x)-\tilde{j}(0)}{x-0} = \dfrac{1-\cos x}{x\sin x} = \dfrac{1-\cos x}{x^2}\dfrac{x}{\sin x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$, donc $\tilde{j}$ est dérivable en 0, avec $\tilde{j}'(0) = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 4.

(a) La fonction f est dérivable lorsque $\sin x \neq 0$, c'est-à-dire sur $D'_f = \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. On a : $\forall x \in D'_f,\ f'(x) = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} + 1 > 0$, donc f est strictement croissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Comme f est de plus usuellement continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, d'après le théorème de la bijection monotone, f réalise une bijection de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ dans $J = \left[f(0), f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right] = \left[0, \dfrac{\pi+2}{2}\right]$.

(b) Comme f' est définie et ne s'annule pas en tout point de $J \setminus \{0\}$, f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \{0\}$. En 0, f' n'est pas définie, mais :

$$\forall y \neq 0,\ \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(0)}{y-0} \underset{x=f^{-1}(y)}{=} \frac{x}{f(x)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\frac{\sin x}{x}+\sqrt{x}}} \underset{\substack{y\to 0\\ \text{ie } x\to 0}}{\longrightarrow} 0,$$

donc f^{-1} est dérivable en 0, avec $(f^{-1})'(0)=0$.

Exercice 5.

(c) Comme $\frac{1}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$, on applique le théorème des accroissements finis à $\cos$ entre 1 et $\frac{\pi}{3}$: comme $\cos$ est dérivable sur $\left[1,\frac{\pi}{3}\right]$, il existe $c \in \left]1,\frac{\pi}{3}\right[$ tel que $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-\cos(1)}{\frac{\pi}{3}-1} = \cos'(c) = -\sin(c)$, donc : $\left|\cos(1)-\frac{1}{2}\right| \leq \frac{\pi}{3}-1 \leq 0,05$.

Exercice 6. Soit T une période de f. On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T)=f(x)$, donc en dérivant : $f'(x+T)=f'(x)$; donc f' est également T-périodique. Comme f' est continue, d'après le théorème de Weierstrass, f' est bornée par un réel C sur $[0,T]$, donc sur $\mathbb{R}$. D'après l'inégalité des accroissements finis, f est donc C-lipschitzienne.

Exercice 9. Soit $d \in [a,b]$. La tangente en d à la courbe de f a pour équation cartésienne : $y=f'(d)(x-d)+f(d)$, donc passe par l'origine si et seulement si $0=f(d)-df'(d)=-d^2g'(d)$, où $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$. On a : $g(a)=g(b)=0$, et g est dérivable sur $[a,b]$, donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $c\in\,]a,b[$ tel que $g'(c)=0$, c'est-à-dire tel que la tangente en c à la courbe de f passe par l'origine.

Exercice 10. On considère $h : x \mapsto (f(b)-f(a))\,g(x)-(g(b)-g(a))\,f(x)$. La fonction h est dérivable sur $[a,b]$ (car f et g le sont) et $h(a)=f(b)g(a)-f(a)g(b)=h(b)$. Donc, d'après le théorème de Rolle : $\exists c \in\,]a,b[,\ h'(c)=0$; d'où la formule voulue.

Exercice 11. Soit $x>0$. La fonction $f : x \mapsto xe^{\frac{1}{x}}$ est continue sur $[x,x+1]$ et dérivable sur $]x,x+1[$ donc, d'après le théorème des accroissements finis : $\exists c_x \in\,]x,x+1[,\ f'(c_x)=\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x}=f(x+1)-f(x)$.

Or : $c_x > x$ donc $c_x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, puis $f'(c_x)=\left(1-\frac{1}{c_x}\right)e^{\frac{1}{c_x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Donc $f(x+1)-f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Exercice 12. Soient $a,b \in \mathbb{R}$. La fonction $f : x \mapsto e^{ix}$ a pour dérivée $f' : x \mapsto ie^{ix}$, donc f' est bornée (en module) par 1, donc, d'après l'inégalité des accroissements finis : $|f(b)-f(a)| \leq 1 \times |b-a|$.

Exercice 13.

(a) Notons $g : x \mapsto x^2+1$ et $h : x \mapsto e^{3x}$. D'après la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) &= g(x)h^{(n)}(x)+ng'(x)h^{(n-1)}(x)+\frac{n(n-1)}{2}g''(x)h^{(n-2)}(x)\\ &= 3^{n-2}\left(3^2(x^2+1)+3\times 2x+2\right)e^{3x}\\ &= 3^{n-2}(9x^2+6x+11)e^{3x}.\end{aligned}$$

(b) On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \dfrac{1}{4}\cos(3x) + \dfrac{3}{4}\cos(x)$, donc $g^{(n)}(x) = \dfrac{3^n}{4}\cos^{(n)}(3x) + \dfrac{3}{4}\cos^{(n)}(x)$, où $\cos^{(n)} = \cos$ si $n = 4k$, $-\sin$ si $n = 4k+1$, $-\cos$ si $n = 4k+2$, $\sin$ si $n = 4k+3$.

(c) D'après la formule de Leibniz : $\forall x \in \mathbb{R},\ h^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin^{(k)}(x) e^x$.

(d) D'après la formule de Leibniz :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ i^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x} \left((x^3 + x^2 + 1) - n(3x^2 + 2x) + 3n(n-1)x - n(n-1)(n-2) \right).$$

(e) $\forall x \neq -1,\ j(x) = \dfrac{2}{1+x} - 1$, donc $j^{(n)}(x) = 2 \times (-1)^n \dfrac{n!}{(1+x)^{n+1}}$.

(f) $\forall x < \dfrac{2}{3}$, $k'(x) = \dfrac{3}{3x-2}$, donc $k^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \dfrac{3^n (n-1)!}{(3x-2)^n}$.

Exercice 15. Remarquons que ces fonctions sont de classe C^∞ en tout point de $\mathbb{R}^*$. Il suffit donc de déterminer leur classe en 0.

(a) La fonction f est continue en 0 lorsque $n \geq 1$.
De plus : $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x > 0,\ f^{(k)}(x) = \dfrac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$ si $k \leq n$, 0 si $k > n$. Donc $f^{(k)}(x) \underset{x \to 0,\ x>0}{\longrightarrow} 0$ si $k \neq n$, $n!$ si $k = n$. Donc, d'après le théorème de la limite de la dérivée, f est de classe C^{n-1} (et n'est pas de classe D^n) en 0.

(b) La fonction g est continue en 0 (par croissances comparées).
De plus : $\forall x > 0, g'(x) = 3x^2 \ln(x) + x^2 \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$; $g''(x) = 6x \ln(x) + 5x \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$; $g^{(3)}(x) = 6\ln(x) + 11 \underset{x \to 0}{\longrightarrow} -\infty$ donc, d'après le théorème de la limite de la dérivée, g est de classe C^2 (et n'est pas de classe D^3) en 0.

(c) Par encadrement, la fonction h est continue en 0. De plus : $\forall x > 0, h'(x) = 2x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0. Donc, d'après le théorème de la limite de la dérivée, h n'est pas de classe C^1 en 0. Vérifions si elle est de classe D^1 : $\forall x > 0,\ \dfrac{h(x) - h(0)}{x - 0} = x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ (par encadrement), donc h est dérivable en 0. Donc h est de classe D^1 (et n'est pas de classe C^1) en 0.

(d) On a : $\forall x \geq 0,\ i(x) = \dfrac{x}{1+x}$ et $\forall x < 0,\ i(x) = \dfrac{x}{1-x}$.
Comme $i(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0 = i(0)$, la fonction i est continue en 0.
De plus : $\forall x > 0,\ i'(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$ et $\forall x < 0,\ i'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$ donc, d'après le théorème de la limite de la dérivée, i est de classe C^1 en 0.
$\forall x > 0,\ i''(x) = -\dfrac{2}{(1+x)^3} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} -2$ et $\forall x < 0,\ i''(x) = \dfrac{2}{(1-x)^3} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 2$ donc, d'après le théorème de la limite de la dérivée, i n'est pas de classe D^2 en 0.

Exercice 16. La fonction f est usuellement de classe C^∞ en tout $x \in \mathbb{R}^*$.
En 0 : $f(x) \underset{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}}{\longrightarrow} 0 = f(0)$, donc f est continue en 0.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons f de classe C^n en 0. Alors : $\forall x < 0,\ f^{(n+1)}(x) = 0$ et : $\forall x > 0,\ f^{(n+1)}(x) =$

$P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$ pour un certain polynôme P_{n+1}, donc , par croissances comparées : $f^{(n+1)}(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{\longrightarrow} 0$.

Donc, d'après le théorème de la limite de la dérivée, $f^{(n)}$ est dérivable en 0 et $f^{(n+1)}$ est continue en 0; c'est-à-dire que f est de classe C^{n+1} en 0.
Par récurrence, f est donc de classe C^∞ en 0, donc sur $\mathbb{R}$.

Exercice 17. Comme $f(a) = f(b) = 0$ et que f est dérivable sur $[a, b]$, d'après le théorème de Rolle, il existe $c_1 \in]a, b[$ tel que $f'(c_1) = 0$.
Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$, supposons qu'il existe $c_k \in]a, b[$ tel que $f^{(k)}(c_k) = 0$. Alors $f^{(k)}(a) = f^{(k)}(c_k)$ et $f^{(k)}$ est dérivable sur $[a, b]$, d'après le théorème de Rolle, il existe $c_{k+1} \in]a, c_k[\subset]a, b[$ tel que $f^{(k+1)}(c_{k+1}) = 0$.
Par récurrence, il existe donc $c_n \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Exercice 18. Notons n le degré de f et $g : x \mapsto f(x) - e^x$. La fonction g est usuellement de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R},\ g^{(n+1)}(x) = -e^x < 0$.
Supposons que g s'annule $n+2$ fois sur $\mathbb{R}$; alors, d'après le théorème de Rolle, g' s'annule $n+1$ fois, puis g'' n fois, et par suite $g^{(n+1)}$ s'annule 1 fois sur $\mathbb{R}$, ce qui est absurde. Donc g s'annule au plus $n+1$ fois sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que les courbes de f et $\exp$ se croisent au plus $n+1$ fois.

Exercice 20. Il suffit de montrer que $\dfrac{\ln(x_1) + \cdots + \ln(x_n)}{n} \leq \ln\left(\dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)$, ce qui est vrai puisque $\ln$ est concave (et par récurrence sur n).

Exercice 21. La fonction f est usuellement de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, avec : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x} = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$, puis $f''(x) = \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} > 0$, donc f est convexe. Soient $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n > 0$. On a :

$$\begin{aligned}
\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\prod_{k=1}^n (a_k + b_k)\right)^{\frac{1}{n}} \quad &\Leftrightarrow \quad 1 + \left(\prod_{k=1}^n \frac{a_k}{b_k}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{a_k}{b_k}\right)\right)^{\frac{1}{n}} \\
&\Leftrightarrow \quad 1 + \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln\frac{a_k}{b_k}\right) \leq \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{a_k}{b_k}\right)\right) \\
&\Leftrightarrow \quad f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln\frac{a_k}{b_k}\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\ln\frac{a_k}{b_k}\right) \\
&\underset{x_k = \ln\frac{a_k}{b_k}}{\Leftrightarrow} \quad f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(x_k)
\end{aligned}$$

où la dernière inégalité est vraie puisque f est convexe; donc, par équivalence, la formule voulue est vraie.

Exercice 22. Soient $x, y > 0$, notons $X = x^p$ et $Y = y^q$. Alors :

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \Leftrightarrow X^{\frac{1}{p}} Y^{\frac{1}{q}} \leq \frac{X}{p} + \frac{Y}{q} \Leftrightarrow \frac{1}{p}\ln(X) + \frac{1}{q}\ln(Y) \leq \ln\left(\frac{X}{p} + \frac{Y}{q}\right),$$

où la dernière inégalité est vraie car $\ln$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc, par équivalence :$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$.

Soient $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n > 0$. On pose, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_k = \frac{a_k}{\left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}}$ et $\beta_k = \frac{b_k}{\left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}}$.

L'inégalité voulue est alors équivalente à $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k \leq 1$.

Or, d'après la formule précédente : $\forall k \in [\![1, n]\!],\ \alpha_k \beta_k \leq \frac{\alpha_k^p}{p} + \frac{\beta_k^q}{q} = \frac{1}{p} \frac{a_k^p}{\sum_{k=1}^n a_k^p} + \frac{1}{q} \frac{b_k^q}{\sum_{k=1}^n b_k^q}$, donc, en sommant pour k allant de 1 à n : $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.