Devoir surveillé n° 6

CORRIGÉ

Exercice 1.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \neq 0$. En posant $y = 0$, on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)^2 = f(x)^2 f(0)^2$, donc $f(0)^2 = 1$, donc $f(0) = \pm 1$.
2. (a) Par hypothèse, l'assertion est vraie pour $n = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons-la vraie au rang n. Alors : $f\left(\frac{x}{2^{n+1}} + \frac{x}{2^{n+1}}\right) f\left(\frac{x}{2^{n+1}} - \frac{x}{2^{n+1}}\right) = f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)^4$, donc $f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)^4 = f\left(\frac{x}{2^n}\right) f(0) = 0$, donc $f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = 0$. Donc, par récurrence, l'assertion est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons $f(x) = 0$. D'après la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N},\ f\left(\frac{x}{2^n}\right) = 0$, donc, comme f est continue et que $\frac{x}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $f(0) = 0$, ce qui est faux par hypothèse. Donc $f(x) \neq 0$.
   Donc f ne s'annule pas, est continue et $f(0) = 1 > 0$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f est strictement positive.
3. (a) Comme f est strictement positive et que $\ln$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, φ est bien définie. Comme les fonctions f et $\ln$ sont continues, par composition, φ l'est également.

   (b) On a : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \varphi(x + y) + \varphi(x - y) = 2\varphi(x) + 2\varphi(y)$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. On procède par récurrence double : l'assertion voulue est vraie pour $n = 0$ puisque $\varphi(0) = \ln(f(0)) = \ln(1) = 0 = 0^2\varphi(x)$, et pour $n = 1$ immédiatement. Soit $n \geq 2$, supposons-la vraie aux rangs n et $n - 1$. On a :
   $$\varphi((n + 1)x) + \varphi((n - 1)x) = 2\varphi(nx) + 2\varphi(x),$$
   donc par hypothèse de récurrence :
   $$\begin{aligned} \varphi((n+1)x) &= 2\varphi(nx) + 2\varphi(x) - \varphi((n-1)x) \\ &= \left(2n^2 + 2 - (n-1)^2\right)\varphi(x) \\ &= (n+1)^2\varphi(x). \end{aligned}$$
   Par récurrence, l'assertion est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (c) Notons $x = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$.
   D'après la question précédente, d'une part : $\varphi(qx) = q^2\varphi(x)$, et d'autre part : $\varphi(qx) = \varphi(p)$.
   Or $\varphi(p) = p^2\varphi(1)$ si $p \in \mathbb{N}$, et $\varphi(p) = (-p)^2\varphi(-1)$ si $p \in -\mathbb{N}$; et $\varphi(1) + \varphi(-1) = 2\varphi(0) + 2\varphi(1)$, donc $\varphi(-1) = \varphi(1)$. Donc : $\varphi(p) = \lambda p^2$.
   Donc $\varphi(x) = \frac{1}{q^2}\varphi(qx) = \lambda\frac{p^2}{q^2} = \lambda x^2$.

   (d) L'assertion voulue est vraie pour tout $x \in \mathbb{Q}$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et que φ est continue, elle est donc vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. D'après les questions précédentes, si f est solution et $f(0) = 1$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f : x \mapsto e^{\lambda x^2}$. Réciproquement, ces fonctions sont solutions.
   De même, si $f(0) = -1$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f : x \mapsto -e^{\lambda x^2}$, et réciproquement ces fonctions sont solutions. Finalement :
   $$S = \left\{0,\ x \mapsto e^{\lambda x^2},\ x \mapsto -e^{\lambda x^2} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

Exercice 2.

1. La fonction $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$, vue en cours, convient : f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$, mais : $\forall x \neq 0,\ f'(x) = 2x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ donc f' n'a pas de limite en 0.

2. (a) Soit $x \in [a, b]$. Si $x = a$, alors $\tau_a(x) = f'(a)$; et sinon, alors $\tau_a(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ donc, comme f est continue et dérivable sur $[a, x]$, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a, x[$ tel que $\tau_a(x) = f'(c)$. Donc $\tau_a(x)$ est une valeur atteinte par f' sur $[a, b]$.

   (b) Comme f est continue, τ_a est continue sur $]a, b]$; et comme $\tau_a(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f'(a) = \tau_a(a)$, τ_a est continue en a. Donc τ_a est continue sur $[a, b]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, tout réel entre $\tau_a(a) = f'(a)$ et $\tau_a(b) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est atteint par τ_a sur $[a, b]$, donc par f' sur $[a, b]$ d'après la question précédente.

   (c) On a montré, avec τ_a, que f' atteint toutes les valeurs entre $f'(a)$ et $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Similairement, avec $\tau_b : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in [a, b],\ \tau_b(x) = \begin{cases} \frac{f(b) - f(x)}{b - x} & \text{si} \quad x \neq b \\ f'(b) & \text{si} \quad x = b \end{cases}$, on montre que f' atteint toutes les valeurs entre $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ et $f'(b)$. Donc f' atteint toutes les valeurs entre $f'(a)$ et $f'(b)$.

Exercice 3.

1. Comme $|z| \geq 1$, on a : $\forall k \leq n,\ |z|^k \leq |z|^n$. Par inégalité triangulaire, on a donc : $|1 + z + \ldots + z^{n-1}| \leq 1 + |z| + \ldots + |z|^{n-1} \leq n|z|^n$.
2. On a clairement $P(1) = 0$. Soit z une racine de P de module ≥ 1, alors $nz^n = 1 + z + \ldots + z^{n-1}$, ce qui d'après la question précédente n'est possible que si : $\forall k \leq n,\ |z|^k = |z|^n$, donc si $|z| = 1$, et s'il y a égalité dans l'inégalité triangulaire, donc si z et 1 sont directement proportionnels. Donc $z = 1$.
3. On a $Q = nX^{n+1} - (n + 1)X^n + 1$, donc $Q' = n(n + 1)X^{n-1}(X - 1)$. Les racines de Q' sont donc 0 (de multiplicité $n - 1$) et 1 (de multiplicité 1). Or 0 n'est pas racine de Q, donc toutes les racines de Q sont simples sauf 1, de multiplicité 2. Donc 1 est racine de P de multiplicité 1, et toutes les autres racines de P sont simples.
4. Étudions la fonction polynomiale $f : x \mapsto nx^{n+1} - (n + 1)x^n + 1$. Elle est dérivable, et : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = n(n + 1)x^{n-1}(x - 1)$. Donc : $\forall x \in \mathbb{R}_-,\ f'(x) \leq 0$ si n est impair, ≥ 0 si n est pair. L'étude des variations de f et le théorème des valeurs intermédiaires indiquent alors que Q, donc P, admet une unique autre racine réelle, négative, si et seulement si n est pair.

Problème.

I. 1. La fonction f est le quotient de deux fonctions polynomiales, dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$, donc f est de classe C^∞. On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+$,
$f'(x) = \dfrac{(1+x)^2 - 2x(1+x)}{(1+x)^4} = -\dfrac{x-1}{(x+1)^3}$,
$f''(x) = -\dfrac{(x+1)^3 - 3(x-1)(x+1)^2}{(x+1)^6} = 2\dfrac{x-2}{(x+1)^4}$.

2. On peut encore calculer : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f^{(3)}(x) = -6\dfrac{x-3}{(x+1)^5}$.

La formule se généralise, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \dfrac{x-n}{(x+1)^{n+2}}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, $f^{(n)}(x) = 0 \Leftrightarrow x = n$, donc $f^{(n)}$ s'annule exactement une fois.

II. 1. Comme $\tan(x) \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} +\infty$, $h(x) \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(a)$. Donc h est prolongeable par continuité en $\dfrac{\pi}{2}$, de prolongement $\tilde{h}$ tel que $\tilde{h}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = f(a)$.

2. Comme $\tilde{h}(\arctan(a)) = f(a) = \tilde{h}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ et que la fonction $\tilde{h}$ est continue sur $\left[\arctan(a), \dfrac{\pi}{2}\right]$ et dérivable sur $\left]\arctan(a), \dfrac{\pi}{2}\right[$, d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in \left]\arctan(a), \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tilde{h}'(c) = 0$, donc tel que $h'(c) = 0$.

3. Comme $h' = \tan' \times f' \circ \tan$ et que $\tan' = 1 + \tan^2$ ne s'annule pas, on a $f'(\tan(c)) = 0$, donc $\alpha = \tan(c)$ convient.

III. 1. Comme g vérifie les hypothèses de la fonction f de la partie précédente, elle vérifie le résultat final : $\exists \beta \in]b, +\infty[,\ g'(\beta) = 0$.

2. Comme g est continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$, il existe d'après le théorème des accroissements finis $d_x \in]x, x+1[$ tel que $g'(d_x) = g(x+1) - g(x)$.

3. i. Comme g' est monotone, d'après le théorème de la limite monotone, elle admet une limite $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ en $+\infty$.

ii. Comme $g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} g(b)$, $g'(d_x) = g(x+1) - g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} g(b) - g(b) = 0$. De plus, $g'(d_x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} l$, donc $l = 0$.

iii. Comme g' est continue sur $[\beta, +\infty[$, dérivable sur $]\beta, +\infty[$, et vérifie $g'(\beta) = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} g'(x)$, d'après le résultat de la partie II, il existe $\gamma \in]\beta, +\infty[\subset]b, +\infty[$ tel que $g''(\gamma) = 0$.

4. i. Si g'' est de signe constant sur $]\beta, +\infty[$, alors g' est monotone sur cet intervalle, ce qui est exclu par hypothèse. Donc il existe x_1, x_2 strictement supérieurs à β tels que $g''(x_1)$ et $g''(x_2)$ sont de signes distincts.

ii. Comme g'' est continue sur $[x_1, x_2]$ et que $g''(x_1)$ et $g''(x_2)$ sont de signes distincts, il existe d'après le théorème des valeurs intermédiaires $\gamma \in]x_1, x_2[\subset]b, +\infty[$ tel que $g''(\gamma) = 0$.

5. D'après les questions précédentes, il existe dans tous les cas $\gamma \in]b, +\infty[$ tel que $g''(\gamma) = 0$. Ce résultat se généralise, comme dans l'exemple de la partie I. : soient n dans $\mathbb{N}$ et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur $[a, +\infty[$ telle que $f(a) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, alors f', f'',…, $f^{(n)}$ s'annulent sur $]a, +\infty[$.