Devoir à la maison n° 10
CORRIGÉ

Exercice 1.

1. Pour $x = y = 0$, on obtient $f(0) = 2f(0)$, donc $f(0) = 0$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $y = -x$, on obtient $f(0) = f(x) + f(-x) - x^2$, d'où la formule voulue.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On procède par récurrence : la formule voulue est triviale pour $n = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons la formule vraie au rang n. Alors :
$$\begin{array}{rcl} f((n+1)x) & = & f(nx+x) \\ & = & f(nx) + f(x) + nx^2 \\ & = & nf(x) - \frac{1}{2}nx^2 + \frac{1}{2}n^2x^2 + f(x) + nx^2 \\ & = & (n+1)f(x) - \frac{1}{2}(n+1)x^2 + \frac{1}{2}(n^2+2n+1)x^2 \\ & = & (n+1)f(x) - \frac{1}{2}(n+1)x^2 + \frac{1}{2}(n+1)^2x^2 \end{array},$$
   donc par récurrence :
$$\forall (x,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N},\ f(nx) = nf(x) - \frac{1}{2}nx^2 + \frac{1}{2}n^2x^2.$$
   De plus, soit $n \in \mathbb{N}$, alors d'après 1. :
$$\begin{array}{rcl} f(-nx) & = & -f(nx) + n^2x^2 \\ & = & -nf(x) + \frac{1}{2}nx^2 - \frac{1}{2}n^2x^2 + n^2x^2 \\ & = & (-n)f(x) - \frac{1}{2}(-n)x^2 + \frac{1}{2}(-n)^2x^2 \end{array},$$
   donc finalement :
$$\forall (x,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z},\ f(nx) = nf(x) - \frac{1}{2}nx^2 + \frac{1}{2}n^2x^2.$$
3. Soit $x \in \mathbb{Q}$, notons $x = \frac{p}{q}$ où $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. La formule précédente appliquée à $n = q$ et x s'écrit :
$$f(p) = qf(x) - \frac{1}{2}qx^2 + \frac{1}{2}q^2x^2,$$
   et la même formule appliquée à $n = p$ et $x = 1$ s'écrit :
$$f(p) = pf(1) - \frac{p}{2} + \frac{p^2}{2}.$$
   On a donc :
$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & \frac{p}{q}f(1) - \frac{1}{2}\frac{p}{q} + \frac{1}{2}\frac{p^2}{q} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}qx^2 \\ & = & xf(1) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2. \end{array}$$

4. Comme f est continue et que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire que pour tout réel x, il existe une suite (x_n) de rationnels convergente vers x), la formule précédente s'étend aux réels :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \left(f(1) - \frac{1}{2}\right)x,$$

   d'où la formule voulue en posant $\lambda = f(1) - \dfrac{1}{2}$.

5. On a procédé par analyse. Effectuons la synthèse : soit $\lambda \in \mathbb{R}$, puis $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}x^2 + \lambda x$.
   Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors :

$$\begin{array}{rcl} f(x+y) & = & \frac{1}{2}(x+y)^2 + \lambda(x+y) \\ & = & \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + xy + \lambda x + \lambda y \\ & = & f(x) + f(y) + xy, \end{array}$$

   donc f est solution du problème. Par analyse-synthèse, on a donc :

$$S = \left\{ f : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + \lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 2.

1. Soit $f : x \mapsto px^2 + qx + r$ une fonction polynomiale de degré 2, avec $p \in \mathbb{R}^*$ et $q, r \in \mathbb{R}$. Alors :
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{p(b^2-a^2)+q(b-a)+r(1-1)}{b-a} = p(a+b)+q.$$
De plus f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2px + q$. On a donc :
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \ \Leftrightarrow\ p(a+b)+q = 2pc+q \ \Leftrightarrow\ c = \frac{a+b}{2},$$
ce qui est le résultat voulu.

2. On a cette fois :
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}{b-a} = -\frac{1}{ab},$$
et f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$. Donc :
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \ \Leftrightarrow\ -\frac{1}{ab} = -\frac{1}{c^2} \ \Leftrightarrow\ c = \sqrt{ab}.$$

3. (a) On a par hypothèse :
$$\forall a \neq b \in \mathbb{R},\ \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'\left(\frac{a+b}{2}\right).$$
Soient $x, h \in \mathbb{R}$. Si $h = 0$, l'égalité voulue est triviale. Sinon, on pose $a = x$ et $b = x + h$, d'où :
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'\left(\frac{2x+h}{2}\right),$$
ce qui est l'égalité voulue.

(b) La fonction f et les fonctions affines étant de classe C^∞, on peut indéfiniment dériver l'égalité obtenue par h. En dérivant une fois, on obtient :
$$\forall (x,h) \in \mathbb{R}^2, \quad f'(x+h) = f'\left(x+\frac{h}{2}\right) + \frac{h}{2}f''\left(x+\frac{h}{2}\right),$$
puis :
$$\begin{aligned} f''(x+h) &= \frac{1}{2}f''\left(x+\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{2}f''\left(x+\frac{h}{2}\right) + \frac{h}{4}f^{(3)}\left(x+\frac{h}{2}\right) \\ &= f''\left(x+\frac{h}{2}\right) + \frac{h}{4}f^{(3)}\left(x+\frac{h}{2}\right), \end{aligned}$$
et enfin :
$$\begin{aligned} f^{(3)}(x+h) &= \frac{1}{2}f^{(3)}\left(x+\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{4}f^{(3)}\left(x+\frac{h}{2}\right) + \frac{h}{8}f^{(4)}\left(x+\frac{h}{2}\right) \\ &= \frac{3}{4}f^{(3)}\left(x+\frac{h}{2}\right) + \frac{h}{8}f^{(4)}\left(x+\frac{h}{2}\right). \end{aligned}$$
Pour $h = 0$, on obtient donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(3)}(x) = \dfrac{3}{4}f^{(3)}(x)$, donc $f^{(3)}(x) = 0$.

(c) Comme $f^{(3)} = 0$, f'' est une fonction constante, donc f' est une fonction affine, donc f est une fonction polynomiale de degré 2.

Avec la réciproque montrée en $1.$, on a donc montré que les fonctions pour lesquelles $c = \dfrac{a+b}{2}$ sont exactement les fonctions polynomiales de degré 2.