

## Feuille d'exercices 15

### ÉLÉMENTS DE CORRECTION

**Exercice 1.**

- (d) Non :  $f : x \mapsto -x$  et  $g : x \mapsto 0$  si  $x < 0$ ,  $2x$  si  $x \geq 0$  sont dans  $E_4$ , mais  $f + g : x \mapsto |x|$  n'est pas dans  $E_4$ .
- (e) Non :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  sont dans  $E_5$ , mais  $A + B = I_2$  n'est pas dans  $E_5$ .
- (f) Non :  $(1, 0) \in E_6$ , mais  $\sqrt{2}(1, 0) \notin E_6$ .
- (g) Non :  $u = (1, 2)$  et  $v = (2, 4)$  sont dans  $E_7$ , mais  $u + v = (3, 6) \notin E_7$ .
- (h) Oui :  $0_{\mathbb{R}^n}$  est bornée ; soient  $u, v$  bornées et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , alors  $\lambda u + \mu v$  est bornée
- (i) Oui :  $0_{\mathbb{R}^n}$  est convergente ; soient  $u, v$  convergentes et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , alors  $\lambda u + \mu v$  est convergente
- (j) Non :  $(0, 0, 1)$  et  $(1, 1, 0)$  sont dans  $E_{10}$ , mais  $u + v = (1, 1, 1) \notin E_{10}$ .

**Exercice 2.**

- (a) Soient  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  tels que  $\lambda_1 u + \lambda_2 v = 0_{\mathbb{R}^2}$ , alors  $\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 - 5\lambda_2 = 0 \end{cases}$  donc  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ . Donc  $u$  et  $v$  ne sont pas colinéaires.
- (b) On a directement :  $u = 2e_1 + 3e_2$  et  $v = e_1 - 5e_2$ .
- (c) D'après les relations précédentes :  $5u + 3v = 13e_1$ , donc  $e_1 = \frac{1}{13}(5u + 3v)$ ; et  $u - 2v = 13e_2$ , donc  $e_2 = \frac{1}{13}(u - 2v)$ .
- (d) On a :  $u = 2e_1 + 3e_2$ ,  $v = e_1 - 5e_2$ ,  $w = -e_1 + 4e_3$ , donc :  $5u + 3v = 13e_1$ , donc  $e_1 = \frac{1}{13}(5u + 3v)$ ;  $u - 2v = 13e_2$ , donc  $e_2 = \frac{1}{13}(u - 2v)$ ;  $e_3 = \frac{1}{4}(e_1 + w) = \frac{1}{52}(20u + 12v + 13w)$ .

**Exercice 4.**

- (e) Soit  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$  :

$$M \in E_5 \Leftrightarrow a + d = 0 \Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{donc } E_5 = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

- (f)  $E_6$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$ . En effet :  $u = (1, 0) \in E_6$ ,  $v = (0, 1) \in E_6$ , mais  $u + v = (1, 1) \notin E_6$ .
- (g) Soit  $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$  :

$$u \in E_7 \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow u = (0, y, z, t) = ye_2 + ze_3 + te_4,$$

$$\text{donc } E_7 = \text{Vect}(e_2, e_3, e_4).$$

- (h) Soit  $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$  :

$$u \in E_8 \Leftrightarrow x = y = 2z = 4t \Leftrightarrow u = (4t, 4t, 2t, t) = t(4, 4, 2, 1),$$

$$\text{donc } E_8 = \text{Vect}((4, 4, 2, 1)).$$

(i) Soit  $P \in \mathbb{R}_3[X]$  :

$$P \in E_9 \Leftrightarrow P(1) = P(2) = 0 \Leftrightarrow P = (X-1)(X-2)(aX+b),$$

donc  $E_9 = \text{Vect}(X(X-1)(X-2), (X-1)(X-2))$ .

(j) Soit  $P \in \mathbb{R}_3[X]$  :

$$P \in E_{10} \Leftrightarrow P(1) = P'(1) = 0 \Leftrightarrow P = (X-1)^2(aX+b),$$

donc  $E_{10} = \text{Vect}(X(X-1)^2, (X-1)^2)$ .

**Exercice 5.** Si  $F \subset G$ , alors  $F \cup G = G$ , donc  $F \cup G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ ; de même si  $G \subset F$ . Réciproquement, supposons que  $F \not\subset G$  et  $G \not\subset F$ . Soient alors  $u \in G \setminus F$  et  $v \in F \setminus G$ ; on a donc  $u, v \in F \cup G$ . Notons  $w = u + v$ . Si  $w \in F$ , alors  $v = w - u \in F$ , ce qui est absurde; et de même,  $w \in G$  est absurde. Donc  $w \notin F \cup G$ . Donc  $F \cup G$  n'est pas stable par +, donc  $F \cup G$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**Exercice 7.**

- (a) Non : ces deux sous-espaces engendrent au plus un sous-espace de dimension 3.
- (b) Oui : la famille  $(v_1, v_2, v_4, v_5)$  est libre (le vérifier !)
- (c) Non :  $v_3 + v_4 = v_5$ , donc ces deux sous-espaces ne sont pas en somme directe.
- (d) Non :  $v_4 = v_5 - v_3$ , donc ces deux sous-espaces ne sont pas en somme directe.

**Exercice 9.**

- (a) Faux :  $(1, 1, 0, 0) = v_1 + v_2 \in \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ , et  $\notin \text{Vect}(v_4, v_5)$ .
- (b) Vrai :  $(1, 1, 0, 0) = v_1 + v_2 = \frac{1}{2}(v_3 - v_2)$ .
- (c) Faux :  $v_3 = 2v_1 + 3v_2 \in \text{Vect}(v_1, v_2) \cap \text{Vect}(v_3, v_4)$ .
- (d) Faux : Comme  $v_3 = 2v_1 + 3v_2$ ,  $\text{Vect}(v_1, v_2) + \text{Vect}(v_2, v_3, v_4) \subset \text{Vect}(v_1, v_2, v_4) \neq \mathbb{R}^4$ .
- (e) Vrai : la famille  $(v_1, v_2, v_4, v_5)$  est libre dans  $\mathbb{R}^4$  (le vérifier !), donc génératrice de  $\mathbb{R}^4$ .

**Exercice 10.**

(c) Soit  $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$  :

$$u \in H \Leftrightarrow 3x - 2y + z - 5t = 0 \Leftrightarrow u = (x, y, -3x + 2y + 5t, t) = x(1, 0, -3, 0) + y(0, 1, 2, 0) + t(0, 0, 5, 1),$$

donc la famille  $((1, 0, -3, 0), (0, 1, 2, 0), (0, 0, 5, 1))$  est génératrice de  $H$ .

(d) Soit  $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$  :

$$u \in I \Leftrightarrow 2x - y = z + 3t = 0 \Leftrightarrow u = (x, 2x, -3t, t) = x(1, 2, 0, 0) + t(0, 0, -3, 1),$$

donc la famille  $((1, 2, 0, 0), (0, 0, -3, 1))$  est génératrice de  $I$ .

**Exercice 11.**

(c) Non :  $(1, 2, -1) - 2(1, 0, 1) = (-1, 2, -3)$ .

(d) Oui

**Exercice 12.**

- (a) Notons  $f_1 : x \mapsto e^x$  et  $f_2 : x \mapsto e^{2x}$ . Soient  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  tels que  $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$ . Alors :  $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x} = 0$ . En particulier,  $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$  et  $\lambda_1 e + \lambda_2 e^2 = 0$ , donc  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ . Donc la famille  $(f_1, f_2)$  est libre.
- (b) Non :  $f_4 = 2f_3 - f_1$ .
- (c) Non :  $87f_1 + 12f_2 = 57f_3$ .

(d) Oui.

### Exercice 14.

(a) Oui

(b) Oui

(c) Oui : soient  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  tels que  $\lambda_1(3u_1 + u_3) + \lambda_2u_3 + \lambda_3(u_2 + u_3) = 0_E$ , alors  $3\lambda_1u_1 + \lambda_3u_2 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)u_3 = 0_E$ , donc, comme  $(u_1, u_2, u_3)$  est libre :  $3\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ , donc  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ .

(d) Non : les vecteurs  $2u_1 + u_2, u_1 - 3u_2$  et  $u_2 - u_1$  sont coplanaires (ils appartiennent tous trois au plan  $\text{Vect}(u_1, u_2)$ ).

**Exercice 15.** Notons  $u_1 = (1, 0, 1, 1), u_2 = (-1, -2, 3, -1), u_3 = (-5, -3, 1, 5)$  et  $v_1 = (-1, -1, 1, -1), v_2 = (4, 1, 2, 4)$ . On a :  $v_1 + v_2 = (3, 0, 3, 3) = 3u_1$  et  $3v_1 + v_2 = (1, -2, 5, 1) = 2u_1 + u_2$ , donc  $v_1 + v_2$  et  $3v_1 + v_2 \in F$ , donc  $v_1, v_2 \in F$ , donc  $G \subset F$ .

### Exercice 16.

(c) Cette famille de vecteurs est liée par la relation  $12u_2 + 51u_3 + 41u_4 = 262u_1$ , donc ce n'est pas une base de  $\mathbb{R}^3$ .

(d) Si  $a = 1$ , la famille est liée, donc n'est pas une base de  $\mathbb{R}^3$ .

Si  $a \neq 1$  : soient  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$  tels que  $\lambda_1(1, 1, a) + \lambda_2(1, a, 1) + \lambda_3(a, 1, 1) = 0_{\mathbb{R}^3}$ , alors 
$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + a\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + a\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ a\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

donc 
$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + a\lambda_3 = 0 \\ (a-1)\lambda_2 + (1-a)\lambda_3 = 0 \\ (1-a)\lambda_2 + (1-a^2)\lambda_3 = 0 \end{cases}, \text{ donc } \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + a\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ (2+a)\lambda_3 = 0 \end{cases} \text{ donc } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0. \text{ Donc}$$

la famille est libre, donc engendre  $\mathbb{R}^3$ . C'est donc une base de  $\mathbb{R}^3$ .

### Exercice 17.

(a) Une famille génératrice de  $E$  est  $((X-1)(X-2), X(X-1)(X-2), X^2(X-1)(X-2))$ . Comme elle est échelonnée en degrés, elle est libre, donc c'est une base de  $E$ .

(b) Une famille génératrice de  $F$  est  $((X-1)^2, X(X-1)^2, X^2(X-1)^2)$ . Comme elle est échelonnée en degrés, elle est libre, donc c'est une base de  $F$ .

(c) Une famille génératrice de  $G$  est  $((1)_{n \in \mathbb{N}}, (3^n)_{n \in \mathbb{N}})$ . Comme c'est une famille libre, c'est une base de  $G$ .

(d) Une famille génératrice de  $H$  est  $((-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1))$ . Comme c'est une famille libre, c'est une base de  $H$ .

(e) Soit  $M \in M_n(R)$ . On a :

$$M \in I \Leftrightarrow M = M^T \Leftrightarrow (\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, m_{ij} = m_{ji}) \Leftrightarrow M = \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_{ij}(E_{ij} + E_{ji}) + \sum_{i=1}^n m_{ii}E_{ii},$$

donc une base de  $I$  est la famille  $(E_{ij} + E_{ji})_{1 \leq i < j \leq n} \cup (E_{ii})_{1 \leq i \leq n}$ .

(f) Soit  $M \in M_n(R)$ . On a :

$$M \in J \Leftrightarrow M = -M^T \Leftrightarrow (\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, m_{ij} = -m_{ji}) \Leftrightarrow M = \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_{ij}(E_{ij} - E_{ji}),$$

donc une base de  $I$  est la famille  $(E_{ij} - E_{ji})_{1 \leq i < j \leq n}$ .

**Exercice 18.** Comme  $w = 2u - 3v$ , une base de  $F$  est  $(u, v)$ . Par mise sous forme Vect, une base de  $G$  est  $((1, 0, -1), (0, 1, -1))$ .

Soient  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , on a :  $w = \lambda u + \mu v \in G \Leftrightarrow (\lambda + \mu) + (-\lambda + \mu) + (2\lambda - \mu) = 0 \Leftrightarrow 2\lambda + \mu = 0 \Leftrightarrow w = \lambda(u - 2v)$ .

Donc  $F \cap G = \text{Vect}(u - 2v)$ ; une base de  $F \cap G$  est donc  $(u - 2v) = ((-1, -3, 4))$ .