Devoir à la maison n° 11

Exercice 1. 1. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on appelle P_λ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $u = (2, 5, 1, 3)$ et $v = (4, 10, \lambda, 6)$.

(a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que P_λ soit un plan.

(b) Pour $\mu \in \mathbb{R}$, on appelle D_μ la droite de $\mathbb{R}^4$ engendrée par le vecteur $w = (\mu, 15, \mu, 9)$. À quelle condition, sur λ et μ, D_μ est-elle contenue dans P_λ ?

2. Soient $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$. On note F l'ensemble des fonctions constantes et G_a l'ensemble des fonctions qui s'annulent en a.

(a) Montrer que G_a est un sous-espace vectoriel de E.

(b) On admet que F est un sous-espace vectoriel de E. Montrer que F et G_a sont supplémentaires dans E.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère, sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, l'application

$$f : P \mapsto P(X+1) + P(X-1) - 2P(X).$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, déterminer le degré de $f(X^p)$.
3. En déduire le noyau et l'image de f.