Feuille d'exercices 16
ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Exercice 1.

(e) Soient $P, Q \in \mathbb{C}_2[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. On a : $f(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(2) = \lambda P(2) + \mu Q(2) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$, donc f est linéaire.

(f) On a : $\varphi(2\exp) = 8\exp \neq 2\varphi(\exp) = 4\exp$, donc φ n'est pas linéaire.

(g) Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(\lambda u + \mu v) = (\lambda u_0 + \mu v_0, \lambda u_1 + \mu v_1, \lambda u_2 + \mu v_2) = \lambda(u_0, u_1, u_2) + \mu(v_0, v_1, v_2) = \lambda f(u) + \mu f(v),$$

donc f est linéaire.

(h) Soient $u = (x, y, z), v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(\lambda u+\mu v) = (\lambda x+\mu a+2(\lambda y+\mu b)+3(\lambda z+\mu c), 2(\lambda y+\mu b)-(\lambda z+\mu c), \lambda x+\mu a+\lambda z+\mu c) = \lambda f(u)+\mu f(v),$$

donc f est linéaire.

(i) Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(\lambda A + \mu B) = (\lambda a + \mu x) + (\lambda d + \mu t) = \lambda(a + d) + \mu(x + t) = \lambda f(A) + \mu f(D),$$

donc f est linéaire.

(j) On a : $f(2) = 8 \neq 2f(1) = 6$, donc f n'est pas linéaire.

Exercice 2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a directement :

$$f(x, y, z) = xf(1, 0, 0) + yf(0, 1, 0) + zf(0, 0, 1) = (-2x - 4z, 3y, 2x + 4z).$$

Exercice 3.

(a) La famille (u, v) est libre. En effet, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda u + \mu v = 0_{\mathbb{R}^2}$, alors $\lambda + 2\mu = \lambda - \mu = 0$, d'où $\lambda = \mu = 0$.
La famille (u, v) est de plus génératrice de $\mathbb{R}^2$. En effet, soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On cherche $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda u + \mu v = (x, y)$. On a :

$$(\lambda u + \mu v = (x, y)) \Leftrightarrow (\lambda + 2\mu = x \text{ et } \lambda - \mu = y) \Leftrightarrow \left(\lambda = \frac{x + 2y}{3} \text{et } \mu = \frac{x - y}{3}\right).$$

Donc (x, y) est combinaison linéaire de u et v.
Donc (u, v) est une base de $\mathbb{R}^2$.

(b) D'après les calculs précédents : $w = 3u - v$, donc, si f est linéaire, alors $f(w) = 3f(u) - f(v) = (5, 4)$.
Donc, si f est linéaire, alors $a = 4$; et dans ce cas :
on a $(1, 0) = \frac{1}{3}u + \frac{1}{3}v$ donc $f(1, 0) = \frac{1}{3}(f(u) + f(v)) = (1, 0)$, et $(0, 1) = \frac{2}{3}u - \frac{1}{3}v$ donc $f(0, 1) = \frac{1}{3}(2f(u) - f(v)) = (1, 1)$. Donc :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = xf(1, 0) + yf(0, 1) = (x + y, y).$$

Réciproquement, cette application est bien linéaire.

Exercice 4. Soit $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$f\circ f\circ f(u)=f\circ f(y,-x-y)=f(-x-y,-y+x+y)=f(-x-y,x)=(x,x+y-x)=u,$$

donc $f\circ f\circ f=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$. Donc f est bijective, de réciproque $f^{-1}=f\circ f$.

Exercice 5.

(e) Soit $P\in\mathbb{K}_n[X]$. On a :

$$f(P)=0_{K[X]}\Leftrightarrow P'=0_{K[X]}\Leftrightarrow P\in\mathbb{K}_0[X],$$

donc $\mathrm{Ker}(f)=\mathbb{K}_0[X]$.
De plus : $\mathbb{K}_n[X]=\mathrm{Vect}(1,X,X^2,\dots,X^n)$, donc :

$$\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}\left(f(1),f(X),f(X^2),\dots,f(X^n)\right)=\mathrm{Vect}\left(0_{\mathbb{K}[X]},1,2X,\dots,nX^{n-1}\right)=\mathbb{K}_{n-1}[X].$$

(f) Soit $M\in M_n(\mathbb{R})$, on a :

$$f(M)=0_n\Leftrightarrow M=-M^\intercal\Leftrightarrow M\in A_n(\mathbb{R}),$$

donc $\mathrm{Ker}\ f=A_n(\mathbb{R})$.
De plus : $\mathrm{Im}\ f=\mathrm{Vect}(f(E_{ij},\ 1\le i,j\le n)=\mathrm{Vect}(E_{ij}+E_{ji},\ 1\le i,j\le n)=S_n(\mathbb{R})$.

(g) Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on a :

$$f(u)=0_{\mathbb{R}^4}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}x+z&=&0\\y-x&=&0\\z+y&=&0\\x+y+2z&=&0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}x+z&=&0\\y+z&=&0\end{array}\right.\Leftrightarrow u=(-z,-z,z)=z(-1,-1,1),$$

donc $\mathrm{Ker}\ f=\mathrm{Vect}((-1,-1,1))$.
De plus :

$$\begin{array}{rcl}\mathrm{Im}\ f&=&\mathrm{Vect}(f(e_1),f(e_2),f(e_3))\\&=&\mathrm{Vect}\left(1,-1,0,1),(0,1,1,1),(1,0,1,2)\right)\\&=&\mathrm{Vect}\left(1,-1,0,1),(0,1,1,1)\right).\end{array}$$

(h) Soit $z=x+iy\in\mathbb{C}$, on a :

$$f(z)=0\Leftrightarrow(x+iy)+i(x-iy)=0\Leftrightarrow x+y=0\Leftrightarrow z=x-ix=x(1-i),$$

donc $\mathrm{Ker}\ f=\mathrm{Vect}(1-i)$.
De plus : $\mathrm{Im}\ f=\mathrm{Vect}(f(1),f(i))=\mathrm{Vect}(1+i)$.

(i) Soit $P\in\mathbb{R}_3[X]$n on a :

$$f(P)=0_{\mathbb{R}[X]}\Leftrightarrow P=(X+1)P'\Leftrightarrow P=\lambda X+\lambda=\lambda(X+1),$$

donc $\mathrm{Ker}\ f=\mathrm{Vect}(X+1)$.
De plus : $\mathrm{Im}\ f=\mathrm{Vect}(f(X^k),\ k\in[\![0,3]\!])=\mathrm{Vect}(1,-X^2-2X,-2X^3-3X^2)$.

(j) Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on a :

$$f(u)=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}x+y&=&0\\x+2ay&=&0\\z&=&0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}x+y&=&0\\(2a-1)y&=&0\\z&=&0\end{array}\right.\Leftrightarrow u=0_{\mathbb{R}^3}\text{ si }a\neq\frac{1}{2},\ u=(-y,y,0)\text{ si }a=\frac{1}{2},$$

donc $\mathrm{Ker}\ f=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$ si $a\neq\frac{1}{2}$, $\mathrm{Vect}((-1,1,0))$ si $a=\frac{1}{2}$.
De plus :

$$\begin{array}{rcl}\mathrm{Im}\ f&=&\mathrm{Vect}(f(e_1),f(e_2),f(e_3))\\&=&\mathrm{Vect}\left(1,1,0),(1,2a,0),(0,0,1)\right)\\&=&\mathbb{R}^3\text{ si }a\neq\frac{1}{2},\ \mathrm{Vect}\left(1,1,0),(0,0,1)\right)\text{ si }a=\frac{1}{2}.\end{array}$$

Exercice 6. Notons $u = (1, 0, 0)$ et $v = (1, 1, 1)$. Il suffit de compléter la famille (u, v) en une base de $\mathbb{R}^3$, par exemple avec $w = (0, 1, 0)$, et de fixer $f(w) = (1, 2, 3) \neq 0$.
On a alors $e = (0, 0, 1) = v - u - w$, donc $f(0, 0, 1) = f(v) - f(u) - f(w) = (-1, -2, -3)$. Puis :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = xf(u) + yf(w) + zf(e) = (y - z, 2y - 2z, 3y - 3z).$$

Exercice 7. On a donc $f : (x, y, z) \mapsto (-2x - 4z, 3y, 2x + 4z)$.

(a) Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. $u \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow 2x + 4z = 3y = 0 \Leftrightarrow x = -2z$ et $y = 0 \Leftrightarrow u = (-2z, 0, z) = z(-2, 0, 1)$. Donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((-2, 0, 1))$.
On a de plus $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(1, 0, 0), f(0, 1, 0), f(0, 0, 1)) = \mathrm{Vect}((-2, 0, 2), (0, 3, 0), (-4, 0, 4)) = \mathrm{Vect}((-1, 0, 1), (0, 1, 0))$.
L'application f n'est donc ni injective, ni surjective.

(b) On vérifie que $(-2, 0, 1) \notin \mathrm{Vect}((-1, 0, 1), (0, 1, 0))$. Donc $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

(c) On a : $\forall u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = (-2x + 4y + 4z, -x + z, -2x + 4y + 4z)$. Donc : $u \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow x = z = -2y \Leftrightarrow u = (-2y, y, -2y) = y(-2, 1, -2)$. Donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((-2, 1, -2))$.
Or $(-2, 1, -2) = f(1, 0, 0)$, donc $(-2, 1, -2) \in \mathrm{Im}(f)$. Donc $\mathrm{Vect}((-2, 1, -2)) \subset \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$, donc $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ ne sont pas en somme directe.
Le noyau et l'image d'un endomorphisme ne sont donc pas toujours supplémentaires, ni en somme directe ! Tout peut arriver.

Exercice 8. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
$u \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y &= 0 \\ 4x - y &= 0 \\ -2x + 2y + 3z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= -2y \\ y &= 4x \\ -2x + 2y + 3z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0$ donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Donc f est injective.
De plus, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1, 4, -2), (2, -1, 2), (0, 0, 3))$. On vérifie que la famille associée est libre, donc génératrice de $\mathbb{R}^3$. Donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$. Donc f est surjective.
Donc f est bijective : c'est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$. Déterminons sa réciproque : soit $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} v = f(u) &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y &= a \\ 4x - y &= b \\ -2x + 2y + 3z &= c \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y &= a \\ -9y &= b - 4a \\ 6y + 3z &= c + 2a \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y &= a \\ y &= \frac{4}{9}a - \frac{1}{9}b \\ 3z &= c - \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x &= \frac{1}{9}a + \frac{2}{9}b \\ y &= \frac{4}{9}a - \frac{1}{9}b \\ z &= -\frac{2}{9}a + \frac{2}{9}b + \frac{1}{3}c \end{cases} \end{aligned}$$

donc $f^{-1}(a, b, c) = \dfrac{1}{9}(a + 2b, 4a - b, -2a + 2b + 3c)$.

Exercice 9. Soit $f \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$. Notons $f : (x, y, z) \mapsto ax + by + cz$. Supposons que f ait F pour noyau, alors $0 = f(1, 1, 1) = a + b + c$, donc $c = -a - b$; et $0 \neq f(1, 0, 0) = a$, donc $a \neq 0$.
Donc : $\forall u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f(u) = ax + by - (a + b)z$. Alors :
$u \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{a}y + \left(1 + \dfrac{b}{a}\right)z \Leftrightarrow u = y\left(-\dfrac{b}{a}, 1, 0\right) + z\left(1 + \dfrac{b}{a}, 0, 1\right)$. Donc $\mathrm{Ker}(f) =$

$\mathrm{Vect}((-b,a,0),(a+b,0,a))$. La famille associée étant libre, $\mathrm{Ker}(f)$ est donc un plan de $\mathbb{R}^3$; donc $\mathrm{Ker}(f)\neq F$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse.
Il n'existe donc pas de forme linéaire de noyau F.
Plus directement, le noyau de f est le sous-espace vectoriel d'équation cartésienne $ax+by+cz=0$, c'est-à-dire un plan de $\mathbb{R}^3$ (ou $\mathbb{R}^3$ si $(a,b,c)=(0,0,0)$). Ce ne peut donc pas être la droite F.

Exercice 10.

(a) On a directement :

$$g\circ f=0_{\mathcal{L}(E,G)}\Leftrightarrow \forall u\in E,\ g(f(u))=0_G\Leftrightarrow \forall u\in E,\ f(u)\in \mathrm{Ker}\, g\Leftrightarrow \mathrm{Im}\, f\subset \mathrm{Ker}\, g.$$

(b) Soit $u\in\mathrm{Ker}\, f$. Alors $f(u)=0_F$ donc $g(f(u))=0_G$, donc $u\in\mathrm{Ker}\, g\circ f$. Donc $\mathrm{Ker}\, f\subset\mathrm{Ker}\, g\circ f$.
Soit $v\in\mathrm{Im}\, g\circ f$. Soit $u\in E$ tel que $v=g\circ f(u)$, alors $v=g(f(u))$ donc $v\in\mathrm{Im}\, g$. Donc $\mathrm{Im}\, g\circ f\subset\mathrm{Im}\, g$.

(c) Supposons que $g\circ f$ soit un isomorphisme. Alors $\mathrm{Ker}\, g\circ f=\{0_E\}$ et $\mathrm{Im}\, g\circ f=G$, donc, d'après la question précédente, $\mathrm{Ker}\, f=\{0_E\}$ et $\mathrm{Im}\, g=G$. Donc f est injective et g est surjective.

Exercice 11. D'après l'exercice précédent, on a toujours $\mathrm{Ker}\, f\subset\mathrm{Ker}\, f^2$ et $\mathrm{Im}\, f^2\subset\mathrm{Im}\, f$.

Supposons que $\mathrm{Ker}\, f\cap\mathrm{Im}\, f=\{0_E\}$. Soit $u\in\mathrm{Ker}\, f^2$. Alors $f(f(u))=0_E$, donc $f(u)\in\mathrm{Ker}\, f\cap\mathrm{Im}\, f$, donc $f(u)=0_E$, donc $u\in\mathrm{Ker}\, f$. Donc $\mathrm{Ker}\, f^2\subset\mathrm{Ker}\, f$, donc $\mathrm{Ker}\, f=\mathrm{Ker}\, f^2$.
Réciproquement, supposons que $\mathrm{Ker}\, f=\mathrm{Ker}\, f^2$. Soit $u\in\mathrm{Ker}\, f\cap\mathrm{Im}\, f$, alors $f(u)=0_E$ et il existe $v\in E$ tel que $u=f(v)$, donc $f(f(v))=0_E$, donc $v\in\mathrm{Ker}\, f^2$. Donc $v\in\mathrm{Ker}\, f$, donc $f(v)=0_E$, donc $u=0_E$. Donc $\mathrm{Ker}\, f\cap\mathrm{Im}\, f=\{0_E\}$.

Supposons que $\mathrm{Ker}\, f+\mathrm{Im}\, f=E$. Soit $u\in\mathrm{Im}\, f$. Soit $v\in E$ tel que $u=f(v)$. Soient $v_1\in\mathrm{Ker}\, f$ et $v_2\in\mathrm{Im}\, f$ tels que $v=v_1+v_2$, puis $w\in E$ tel que $v_2=f(w)$, alors : $u=f\circ f(w)$, donc $u\in\mathrm{Im}\, f^2$. Donc $\mathrm{Im}\, f\subset\mathrm{Im}\, f^2$, donc $\mathrm{Im}\, f=\mathrm{Im}\, f^2$.
Réciproquement, supposons que $\mathrm{Im}\, f=\mathrm{Im}\, f^2$. Soit $u\in E$. Alors $f(u)\in\mathrm{Im}\, f$, donc $f(u)\in\mathrm{Im}\, f^2$. Soit donc $v\in E$ tel que $f(u)=f\circ f(v)$, alors $f(u-f(v))=0_E$, donc $w=u-f(v)\in\mathrm{Ker}\, f$. Donc $u=w+f(v)\in\mathrm{Ker}\, f+\mathrm{Im}\, f$. Donc $\mathrm{Ker}\, f+\mathrm{Im}\, f=E$.

Exercice 12.

(c) Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On cherche $v=\lambda(1,2,3)$ et $w=\alpha(1,0,0)+\beta(1,1,0)$ tels que $u=v+w$:

$$u=v+w\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}x&=&\lambda+\alpha+\beta\\ y&=&2\lambda+\beta\\ z&=&3\lambda\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}\alpha&=&x-y+\dfrac{z}{3}\\ \beta&=&y-\dfrac{2z}{3}\\ \lambda&=&\dfrac{z}{3}\end{array}\right.,$$

donc la décomposition de u selon F et G s'écrit : $u=\left(\dfrac{z}{3},\dfrac{2z}{3},z\right)+\left(x-\dfrac{z}{3},y-\dfrac{2z}{3},0\right)$.
On a donc directement : $s(u)=\left(\dfrac{z}{3},\dfrac{2z}{3},z\right)-\left(x-\dfrac{z}{3},y-\dfrac{2z}{3},0\right)=\left(-x+\dfrac{2z}{3},-y+\dfrac{4z}{3},z\right)$.

(d) Avec les notations et d'après les calculs ci-dessus : $p(u)=\left(x-\dfrac{z}{3},y-\dfrac{2}{3}z,0\right)$.

Exercice 13.

(e) Soit $P\in\mathbb{R}[X]$. Notons $P=TQ+R$ sa division euclidienne par Q. Alors : $f\circ f(P)=f(R)=R=f(P)$, donc $f\circ f=f$. Donc f est un projecteur de $\mathbb{R}[X]$.
On a : $P\in\mathrm{Ker}(f)\Leftrightarrow R=0_{\mathbb{R}[X]}\Leftrightarrow Q|P$, donc $\mathrm{Ker}(f)=\{P\in\mathbb{R}[X]\mid Q \text{ divise } P\}=Q\mathbb{R}[X]$.
De plus : notons $d=\deg(Q)$; on vérifie par double inclusion que $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}_d[X]$.
Donc f est le projecteur sur $\mathbb{R}_d[X]$ parallèlement à $Q\mathbb{R}[X]$.

Exercice 14.

(a) Par équivalence :

$$(q \text{ est un projecteur}) \Leftrightarrow q \circ q = q \Leftrightarrow (\mathrm{Id}_E - p) \circ (\mathrm{Id}_E - p) = \mathrm{Id}_E - p \Leftrightarrow p \circ p = p \Leftrightarrow (p \text{ est un projecteur}).$$

(b) On a :

$$u \in \mathrm{Im}\, p \Leftrightarrow p(u) = u \Leftrightarrow q(u) = 0_E \Leftrightarrow u \in \mathrm{Ker}\, q,$$

donc $\mathrm{Ker}\, q = \mathrm{Im}\, p$, et de même :

$$u \in \mathrm{Ker}\, p \Leftrightarrow p(u) = 0_E \Leftrightarrow q(u) = u \Leftrightarrow u \in \mathrm{Im}\, q,$$

donc $\mathrm{Im}\, q = \mathrm{Ker}\, p$.

Exercice 15. Soit $u \in E$. Notons $u = f_1 + g_1$ la décomposition de u selon $\mathrm{Im}\, p$ et $\mathrm{Ker}\, p$, et $u = f_2 + g_2$ la décomposition de u selon $\mathrm{Im}\, q$ et $\mathrm{Ker}\, q$.

Supposons $\mathrm{Ker}\, p = \mathrm{Ker}\, q$. Alors $f_1 - f_2 = g_2 - g_1 \in \mathrm{Ker}\, p$, donc :

$$p \circ q(u) = p(f_2) = p(f_1) = f_1 = p(u),$$

donc $p \circ q = p$, et symétriquement $q \circ p = q$.
Réciproquement, supposons $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$. Soit $u \in \mathrm{Ker}\, p$, alors : $q(u) = q \circ p(u) = q(0_E) = 0_E$. Donc $\mathrm{Ker}\, p \subset \mathrm{Ker}\, q$, et symétriquement $\mathrm{Ker}\, q \subset \mathrm{Ker}\, p$, donc $\mathrm{Ker}\, p = \mathrm{Ker}\, q$.

Supposons $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Im}\, q$. Alors :

$$p \circ q(u) = p(f_2) = f_2 = q(u),$$

donc $p \circ q = q$, et symétriquement $q \circ p = p$.
Réciproquement, supposons $p \circ q = q$ et $q \circ p = p$. Soit $u \in \mathrm{Im}\, p$, et soit $v \in E$ tel que $u = p(v)$, alors : $u = p(v) = q(p(u)) \in \mathrm{Im}\, q$. Donc $\mathrm{Im}\, p \subset \mathrm{Im}\, q$, et symétriquement $\mathrm{Im}\, q \subset \mathrm{Im}\, p$, donc $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Im}\, q$.

Exercice 16. On a :

$$(p + q \text{ est un projecteur}) \Leftrightarrow (p+q)^2 = p + q \Leftrightarrow p \circ q + q \circ p = 0.$$

Si $p \circ q = q \circ p = 0$, les assertions ci-dessus sont vraies. Réciproquement, si $p \circ q + q \circ p = 0$, alors en composant par p à gauche : $p \circ q + p \circ q \circ p = 0$, et à droite : $p \circ q \circ p + q \circ p = 0$, donc $p \circ q - q \circ p = 0$. Donc $p \circ q = q \circ p = 0$. On a bien l'équivalence voulue.

Dans ce cas, soit $w \in \mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q$. Soient $u, v \in E$ tels que $w = p(u) = q(v)$, alors $w = p \circ p(u) = p \circ q(v) = 0_E$, donc $\mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q = \{0_E\}$.
De plus, on a immédiatement $\mathrm{Im}(p+q) \subset \mathrm{Im}\, p + \mathrm{Im}\, q$. Réciproquement, soit $w \in \mathrm{Im}\, p + \mathrm{Im}\, q$, et soient $u, v \in E$ tels que $w = p(u) + q(v)$. Alors $q(v) = q(w - p(u)) = q(w)$, et de même $p(u) = p(w)$, donc $w = (p+q)(w) \in \mathrm{Im}\, p + q$, donc $\mathrm{Im}\, p + \mathrm{Im}\, q \subset \mathrm{Im}\, p + q$. Donc $\mathrm{Im}(p+q) \subset \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Im}\, q$.

Par ailleurs, on a immédiatement $\mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q \subset \mathrm{Ker}\, p + q$. Réciproquement, soit $u \in \mathrm{Ker}\, p + q$. Alors $p(u) + q(u) = 0_E$, donc en composant par p : $p(u) = 0_E$, donc $u \in \mathrm{Ker}\, p$, et de même $u \in \mathrm{Ker}\, q$. Donc $u \in \mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q$. Donc $\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q$.