Feuille d'exercices 17
ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Exercice 2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme la fonction $\cos$ est de classe C^5 sur $[0, x]$ et 6 fois dérivable sur $]0, x[$, on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 5. D'après cette formule, il existe $c \in]0, x[$ tel que $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cos(c)\dfrac{x^6}{6!}$. Donc :

$$\left|\cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!}\right| = |\cos(c)| \left|\frac{x^6}{6!}\right| \leq \frac{x^6}{6!}$$

par encadrement de $\cos$ (et en notant que $x^6 \geq 0$).
À 10^{-8} près, on a donc $\cos(0,1) \simeq 1 - \dfrac{0,1^2}{2!} + \dfrac{0,1^4}{4!} = 1 - 0,005 + \dfrac{10^{-4}}{24} = 0,99500417$.

Exercice 4. Soient $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On applique la formule de Taylor-Lagrange à la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ à l'ordre $2n$ entre 0 et x. Selon cette formule, il existe $c \in]0, x[$ tel que :

$$\ln(1 + x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k} + f^{(2n+1)}(c)\frac{x^{2n+1}}{(2n + 1)!}.$$

Or : $f^{(2n+1)}(c) = \dfrac{(2n)!}{(1 + c)^{2n+1}} \in]0, (2n)![$, d'où l'encadrement voulu.

Notons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Dans l'encadrement précédent, avec $x = 1$, on a : $S_{2n} < \ln(2) < S_{2n+1}$. On peut montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, donc la suite (S_n) est convergente, et par passage à la limite dans l'encadrement : $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$.

Exercice 5. Soit $x \in I$. On note, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, P_k l'assertion :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x - t)^k dt.$$

On raisonne par récurrence : P_0 est vraie (c'est le théorème fondamental de l'analyse).
Soit $k \in [\![0, n - 1]\!]$, supposons P_k vraie. Alors, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x - t)^k dt &= \left[-\frac{f^{(k+1)}(t)}{(k + 1)!}(x - t)^{k+1}\right]_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(k+2)}(t)}{(k + 1)!}(x - t)^{k+1}dt \\ &= \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k + 1)!}(x - x_0)^{k+1} + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(k+2)}(t)}{(k + 1)!}(x - t)^{k+1}dt,\end{aligned}$$

donc P_{k+1} est vraie.
Par récurrence, P_n est donc vraie : c'est la *formule de Taylor avec reste intégral*.

Exercice 7. La fonction $f : x \mapsto x^\alpha$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, et de classe C^∞ sur cet intervalle, avec :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x > 0, f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1)x^{\alpha-n},$$

donc f^n est prolongeable par continuité en 0 si et seulement si $\alpha - n \geq 0$, c'est-à-dire $n \leq \lfloor\alpha\rfloor$.
La fonction f admet donc un développement limité en 0 jusqu'à l'ordre $\lfloor\alpha\rfloor$.

Exercice 8. On a $y = x - 2 \underset{x\to 2}{\longrightarrow} 0$, donc :

- $e^x = e^{y+2} = e^2 e^y = e^2\left(1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + \underset{y\to 0}{o}(y^3)\right) = e^2 + e^2(x-2) + \frac{e^2}{2}(x-2)^2 + \frac{e^2}{6}(x-2)^3 + \underset{x\to 2}{o}\left((x-2)^3\right)$,
- $\sqrt{1+x} = \sqrt{3+y} = \sqrt{3}\sqrt{1+\frac{y}{3}} = \sqrt{3}\left(1 + \frac{\frac{y}{3}}{2} - \frac{\left(\frac{y}{3}\right)^2}{8} + \frac{\left(\frac{y}{3}\right)^3}{16} + \underset{y\to 0}{o}(y^3)\right) = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{6}(x-2) - \frac{\sqrt{3}}{72}(x-2)^2 + \frac{\sqrt{3}}{432}(x-2)^3 + \underset{x\to 2}{o}\left((x-2)^3\right)$,
- $\ln(1+x) = \ln(3+y) = \ln(3) + \ln\left(1+\frac{y}{3}\right) = \ln(3) + \left(\frac{y}{3} - \frac{\left(\frac{y}{3}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{y}{3}\right)^3}{3} + \underset{y\to 0}{o}(y^3)\right) = \ln(3) + \frac{1}{3}(x-2) - \frac{1}{18}(x-2)^2 + \frac{1}{81}(x-2)^3 + \underset{x\to 2}{o}\left((x-2)^3\right)$.

Exercice 9.

(c) $\cos(x)\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$,

(d) $(1-\operatorname{ch}(x))\sin(x) = -\frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^6)$,

(e) $\sqrt{1+x^2}\ln(1+x^3) = x^3 + \frac{x^5}{2} - \frac{x^6}{2} - \frac{x^7}{8} + \underset{x\to 0}{o}(x^8)$,

(f) $\cos x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{1}{4\sqrt{3}}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3 + \frac{1}{48}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^4 - \frac{1}{80\sqrt{3}}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^5 + \underset{x\to 0}{o}\left(\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^5\right)$.

Exercice 10.

(a) $\forall x \in]-1,1[,\ \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + \cdots + \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1})$.

(b) $\forall x \in]-1,1[,\ \arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \cdots + \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2})$.

(c) $\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + \cdots + \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1})$,

donc $\operatorname{argsh}(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \cdots + \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2})$.

Exercice 11. On a $f(x) = \frac{1}{1+|x|^3} = 1 - |x|^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3) = 1 + x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$ si $x < 0$, $1 - x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$ si $x > 0$. La fonction f admet donc un DL_2 en 0 : $f(x) = 1 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$, mais, par unicité du DL, pour tout $n \geq 3$, f n'admet pas de DL_n en 0.

Exercice 12.

(c) On pose $y = x - \frac{\pi}{4}$. Alors : $\tan(x) = \tan\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1+\tan(y)}{1-\tan(y)} = \frac{1 + y + \frac{y^3}{3} + \frac{2}{15}y^5 + \underset{y\to 0}{o}(y^5)}{1 - y - \frac{y^3}{3} - \frac{2}{15}y^5 + \underset{y\to 0}{o}(y^5)} = \left(1 + y + \frac{y^3}{3} + \frac{2}{15}y^5 + \underset{y\to 0}{o}(y^5)\right)\left(1 + y + \frac{y^3}{3} + \frac{2}{15}y^5 + y^2 + \frac{2}{3}y^4 + y^3 + y^5 + y^4 + y^5 + \underset{y\to 0}{o}(y^5)\right) = 1 + 2y + 2y^2 + \frac{8}{3}y^3 + \frac{10}{3}y^4 + \frac{64}{15}y^5 + \underset{y\to 0}{o}(y^5) = 1 + 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{8}{3}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{10}{3}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4 + \frac{64}{15}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^5 + \underset{y\to 0}{o}\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^5\right)$,

(d) $\dfrac{x\cos x}{\sin x} = 1 - \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x^4}{45} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$,

(e) $\cos^3 x = 1 - \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{7}{8}x^4 + + \underset{x\to 0}{o}(x^5)$,

(f) $\sqrt[3]{1+\cos x} = \sqrt[3]{2} - \dfrac{x^2}{6\times 2^{\frac{2}{3}}} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$,

(g) $\ln(1+\sin x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^4}{12} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$,

(h) $e^{\sqrt{1+x}} = e + \dfrac{e}{2}x + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$,

(i) $\cos(x)^{\sin(x)} = 1 - \dfrac{x^3}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$,

(j) $\sin(x - x^2) = x - x^2 - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$,

(k) $\arctan(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \underset{x\to 0}{o}(x^5)$,

(l) $\displaystyle\int_0^x e^{t^2}dt = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + \underset{x\to 0}{o}(x^5)$,

(m) $\arccos(x) = \dfrac{\pi}{2} - x - \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{3x^5}{40} + \underset{x\to 0}{o}(x^5)$.

Exercice 13. La fonction $\arcsin$ est de classe C^∞ en 0, et d'après l'exercice 10 :

$$\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \cdots + \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2}).$$

D'après la formule de Taylor-Young, et par unicité du DL, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\arcsin^{(2n)}(0) = 0$, et $\arcsin^{(2n+1)}(0) = (2n+1)! \times \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} = \left(\dfrac{(2n)!}{2^n n!}\right)^2 = (1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1))^2$.