Devoir à la maison n° 11
CORRIGÉ

Exercice 1.

1. (a) P_λ est un plan si et seulement si u et v sont non colinéaires, c'est-à-dire lorsque $\lambda \neq 2$.

   (b) D_μ est contenue dans P_λ si et seulement si $w \in P_\lambda$. Soient a, b dans $\mathbb{R}$, alors

$$w = a{\cdot}u+b{\cdot}v \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2a+4b & = & \mu \\ 5a+10b & = & 15 \\ a+\lambda b & = & \mu \\ 3a+6b & = & 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a+2b & = & \dfrac{\mu}{2} \\ a+2b & = & 3 \\ a+\lambda b & = & \mu \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\mu}{2} & = & 3 \\ a+2b & = & 3 \\ a+\lambda b & = & \mu \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \mu & = & 6 \\ a+2b & = & 3 \\ a+\lambda b & = & 6 \end{array}\right. ,$$

   et le système $\left\{\begin{array}{rcl} a+2b & = & 3 \\ a+\lambda b & = & 6 \end{array}\right.$ admet une solution si et seulement si $\lambda \neq 2$.
   Donc $D_\mu \subset P_\lambda$ si et seulement si ($\lambda \neq 2$ et $\mu = 6$).

2. (a) La fonction nulle 0_E vérifie $0_E(a) = 0$, donc $0_E \in G_a$.
   Soient u et v dans G_a et λ, μ dans $\mathbb{R}$, alors $(\lambda u+\mu v)(a) = \lambda u(a)+\mu v(a) = 0$, donc $\lambda u+\mu v \in G_a$.
   Donc G_a est stable par combinaison linéaire, c'est bien un sous-espace vectoriel de E.

   (b) Soit u dans $F \cap G_a$. Alors u est constante et $u(a) = 0$, donc $u = 0_E$. Donc $F \cap G_a = \{0_E\}$.
   Soit f dans E, alors $f = f(a) + (f - f(a))$, où $f(a) \in F$ et $f - f(a) \in G_a$, donc $E = F + G_a$.
   Donc F et G_a sont bien supplémentaires : $E = F \oplus G_a$.

Exercice 2.

1. Soient P, Q dans E et λ, μ dans $\mathbb{R}$, alors :

$$\begin{array}{rcl} f(\lambda P + \mu Q) & = & (\lambda P + \mu Q)(X+1) + (\lambda P + \mu Q)(X-1) - 2(\lambda P + \mu Q)(X) \\ & = & \lambda\left(P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)\right) + \mu\left(Q(X+1) + Q(X-1) - 2Q(X)\right) \\ & = & \lambda f(P) + \mu f(Q), \end{array}$$

   donc f est linéaire.

2. Pour $p = 0$ et $p = 1$: $f(X^0) = f(1) = 1 + 1 - 2 = 0_E$, et $f(X^1) = (X+1) + (X-1) - 2X = 0_E$.
   Soit $p \in [\![2, n]\!]$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} f(X^p) & = & (X+1)^p + (X-1)^p - 2X^p \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} X^k + \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} X^k (-1)^{p-k} - 2X^p \\ & = & \displaystyle p(p-1)X^{p-2} + \sum_{k=0}^{p-3} \binom{p}{k} X^k + \sum_{k=0}^{p-3} \binom{p}{k} X^k (-1)^{p-k}, \end{array}$$

   donc $f(X^p)$ est de degré $p - 2$.

3. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ dans E, alors, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} f(P) = 0_E &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k f(X^k) = 0_E \\ &\Leftrightarrow a_2 = \ldots = a_n = 0 \text{ car la famille } \big(f(X^k)\big)_{k\geq 2} \text{ est échelonnée en degrés, donc libre} \\ &\Leftrightarrow P = a_0 + a_1 X, \end{aligned}$$

donc $\mathrm{Ker} f = \mathbb{R}_1[X]$, et :
$\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\,(f(1), f(X), \ldots, f(X^n)) = \mathbb{R}_{n-2}[X]$.