

Devoir surveillé n° 7

Durée : 3 heures. Calculatrices non autorisées.

La notation tiendra largement compte de la qualité de la rédaction.

Les résultats doivent être encadrés. Il est inutile de recopier l'énoncé.

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre souhaité.

Les exercices qui ne sont pas traités dans l'ordre doivent être rédigés sur des copies séparées.

Le sujet et le brouillon ne sont pas à rendre. Le barème est indicatif.

Exercice 1. (6 points) Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère les sous-ensembles :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = z - t = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - z = y - t = 0\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E . On admettra qu'il en est de même pour G .
2. Déterminer $F \cap G$. F et G sont-ils supplémentaires dans E ?
3. Soient $u = (0, 1, 0, 1)$ et $v = (1, 2, 3, 0)$. Montrer que $u \in G \setminus F$ et que $v \notin F + G$.
En déduire que F et $H = \text{Vect}(u, v)$ sont supplémentaires dans E .
4. Déterminer la décomposition de $w = (0, 1, -2, -5)$ selon F et H .

Exercice 2. (6 points) Soit I un intervalle de \mathbb{R} contenant 0. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable, et soit $x \in I$ non nul. On rappelle que, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_x \in]0, x[$ (ou $]x, 0[$) tel que $f'(c_x) = \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

1. (a) On prend $f : x \mapsto e^x$. Déterminer c_x pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, puis déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{c_x}{x}$.
(b) Faire de même pour $f : x \mapsto \arctan(x)$.
2. Soit $n \geq 2$ un entier. On suppose à présent que f est de classe C^n , que $f^{(n)}(0) \neq 0$ et que $f^{(k)}(0) = 0$ pour $k \in [2, n-1]$.

(a) Montrer que $f'(c_x) - f'(0) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^{n-1}$.

(b) Déterminer un équivalent simple de $f'(x) - f'(0)$ quand $x \rightarrow 0$.

(c) En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{c_x}{x}$.

Exercice 3. (6 points) On considère l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto (2x + y + z, x + 2y - z, x - y + 2z) \end{cases}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de \mathbb{R}^3 .
2. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f \circ f = \lambda f$.
3. Déterminer une base de $\text{Ker } f$ et une base de $\text{Im } f$.
4. Montrer que $p = \frac{f}{\lambda}$ est un projecteur de \mathbb{R}^3 , et déterminer ses sous-espaces caractéristiques.

Problème. (12 points) Soit n un entier ≥ 2 . Pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^m a_k X^k$ de $\mathbb{R}[X]$, on note :

$$T_n(P) = \sum_{k=0}^n a_k X^k \quad \text{la troncature de } P \text{ au degré } n \text{ (si } m < n, \text{ on pose } a_k = 0 \forall k > m),$$

$$\text{et } \varphi(P) = P(X + X^2) = \sum_{k=0}^m a_k (X + X^2)^k \quad \text{le polynôme composé de } X + X^2 \text{ par } P.$$

- I. 1. Calculer les images par T_3 et φ de $P_1 = X^2 - 3X + 1$ et de $P_2 = X^5 + X^3$.
 2. i. Montrer que T_n est un projecteur de $\mathbb{R}[X]$ (on admettra que l'application T_n est linéaire).
 - ii. Déterminer les sous-espaces caractéristiques de T_n .
 3. i. Montrer que l'application φ est linéaire.
 - ii. Déterminer, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, une relation entre le degré de P et celui de $\varphi(P)$.
 - iii. L'application φ est-elle injective? surjective?
- II. On définit $\varphi_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \varphi_n(P) = T_n \circ \varphi(P)$.
 1. Montrer que φ_n est bien définie.
 2. Calculer $\varphi_4(X^j)$ pour $j \in \llbracket 0, 4 \rrbracket$.
 3. Montrer que l'application φ_4 est bijective, et déterminer sa bijection réciproque.
- III. Soit I un intervalle de \mathbb{R} contenant 0 et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ admettant un développement limité d'ordre n en 0 de partie régulière $P \in \mathbb{R}_n[X]$, c'est-à-dire : $\forall x \in I, g(x) = P(x) + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$.
 1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto g(x + x^2)$ admet un développement limité d'ordre n en 0, et déterminer sa partie régulière.
 2. Dédire des questions précédentes un calcul par linéarité du développement limité à l'ordre 4 en 0 de $f(x) = \ln(1 + x + x^2)$.
 3. Vérifier ce résultat par un calcul direct de développement limité.