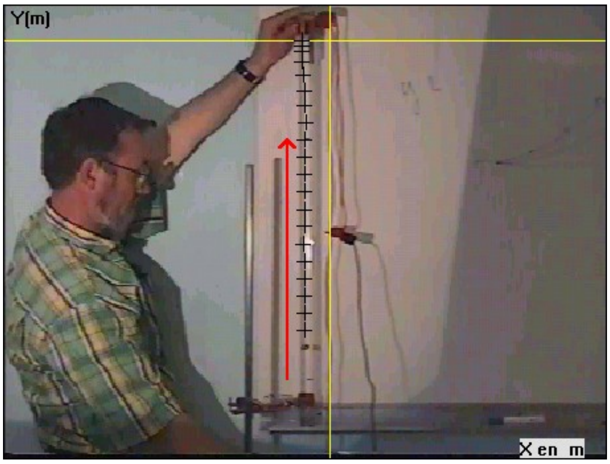
AE Étude de la chute de la bille dans de la glycérine

Une bille en acier est lâchée sans vitesse initiale dans de la glycérine.
Le but de la séance est de rendre compte de l'évolution du mouvement.

Données :

- masse volumique de l'acier : ρ_a = 7800 kg.m^{-3} ,
- masse volumique de la glycérine : ρ_g = 1260 kg.m^{-3} ;
- diamètre de la bille : d = 1,2 cm ;
- intensité de la pesanteur : g = 9,81 m.s^{-2} ;
- viscosité de la glycérine : η = 1,49 kg.m^{-1}.s^{-1}.
- axe des ordonnées : (Oy) vertical vers le haut.

Hypothèse : la bille dans la glycérine est soumise à une force de frottements fluide de la forme :



$$\overrightarrow{f_{frot}} = -k\vec{v},$$

avec k, un coefficient constant dépendant de la forme du corps et du fluide.
Pour une bille sphérique , k = 6$\pi\eta$r, où η est une grandeur caractéristique, indépendante de $\vec{v}$ appelée viscosité du fluide.

Le problème posé consiste à valider cette hypothèse.

Mise en équation du problème

Appliquer les lois de la mécanique et établir l'équation différentielle avec pour inconnue la valeur de la vitesse $v(t)$.

- Présenter la solution sous la forme : $\frac{dv}{dt} + a.v = b$.
- Montrer que a a la dimension de l'inverse d'un temps. Exprimer la constante de temps $\tau = \frac{1}{a}$.

On admet que v(t) atteint V_{lim} à 99 % près au bout de 5τ.

- Monter que la vitesse tend vers une valeur limite V_{lim} que l'on exprimera.

Simulation de la solution par la méthode d'Euler

A partir de la vitesse initiale, la méthode d'Euler permet de calculer de proche en proche des valeurs successives de la vitesse : si l'on connaît v(t), on peut calculer v(t+Δt) grâce à l'équation différentielle.

En effet : $\frac{dv}{dt} \simeq \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \Delta v = \Delta t(b - a \times v)$

Comme Δv = v(t+Δt) – v(t) , $v(t+\Delta t) = v(t) + \Delta t \times (b - a \times v(t))$

Δt est le pas du temps dans le programme associé. Nous lui donnons la valeur : $\Delta t = \frac{5\tau}{100}$. Cela permet de tracer v(t) sur toute la durée de l'évolution de la vitesse avec 100 points.

Identifier chaque étape du programme Python en annexe.
Compléter le programme en y apportant les expressions et les valeurs contextualisant le dispositif étudié.
Exécuter ce programme sur l'ENT/Resources numériques/Capytale/code dossier : **b349-10786783** .

Analyse expérimentale

- Acquérir avec le logiciel LATISPRO © les mesures de l'altitude de la bille à chacune des images.

Pour l'étalonnage des longueurs, apparaissent deux repères sur l'éprouvette, distantes de 50 cm.

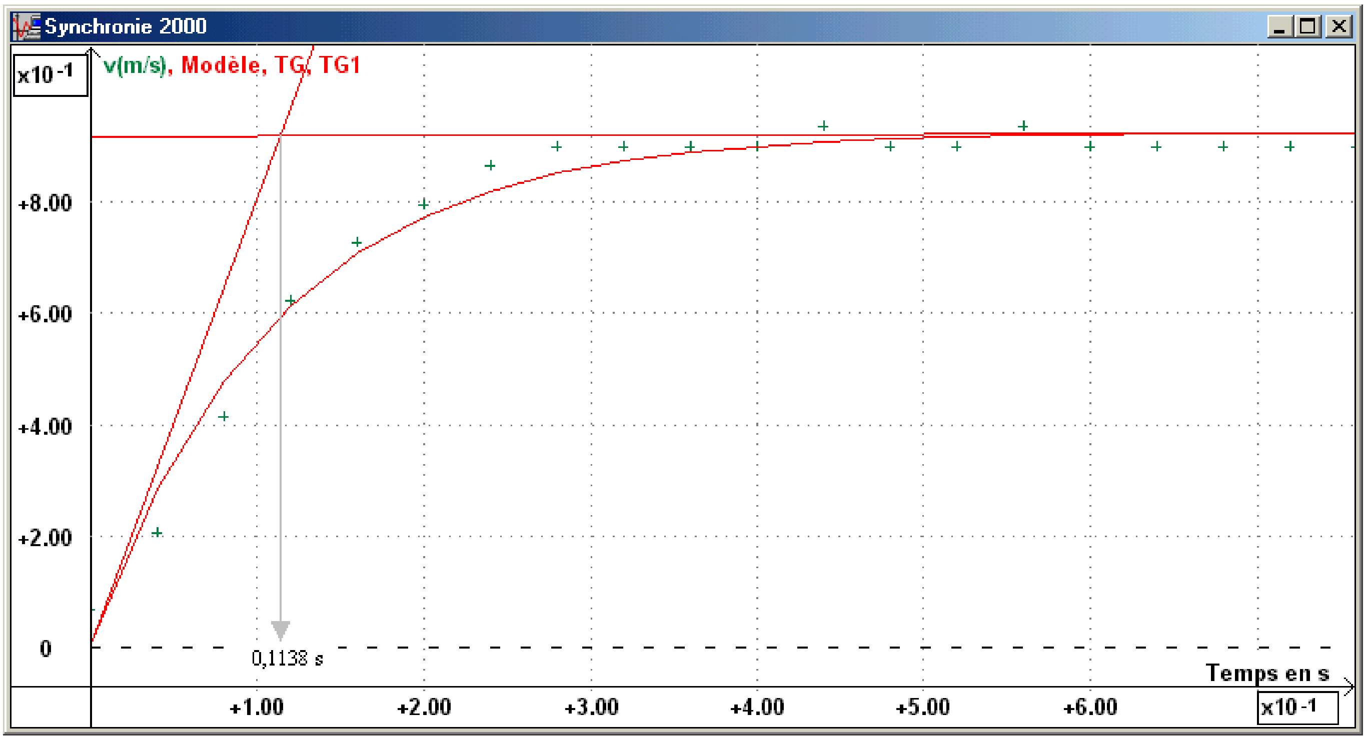
- En déduire un tableau de valeur de la vitesse v.
- Modéliser la courbe v(t) obtenue.
- Mesure la constante τ ainsi que la vitesse limite V_{lim} .

Le traitement expérimental obtenu valide-t-il l'hypothèse formulée ?

ANNEXE : programmation PYTHON de la méthode d'Euler

```
import matplotlib.pyplot as plt
def euler_method(a, b, y0, t0, tf, dt):
    """
    Résout y' = a*y + b par la méthode d'Euler.

    :param a: Coefficient de y dans l'équation différentielle
    :param b: Terme constant
    :param y0: Condition initiale y(t0)
    :param t0: Temps initial
    :param tf: Temps final
    :param dt: Pas de temps
    :return: Liste des temps et liste des solutions y(t)
    """
    t = t0
    y = y0
    times = [t]
    solutions = [y]

   while t < tf:
       y = y + dt * (-a * y + b)
       t = t + dt
       times.append(t)
       solutions.append(y)

   return times, solutions

# Exemple d'utilisation
a = .................. # Coefficient de y
b = .................. # Terme constant
y0 = .................. # Condition initiale
t0 = .................. # Temps initial
tf = .................. # Temps final
dt = .................. #as de temps

times, solutions = euler_method(a, b, y0, t0, tf, dt)

# Affichage des résultats
print("Temps\tSolution y(t)")
for t, y in zip(times, solutions):
    print(f"{t:.2f}\t{y:.4f}")

    # Tracé du graphe
plt.figure(figsize=(15, 10))
plt.plot(times, solutions, label=f"Solution par Euler (dt={dt})", color="blue")
plt.xlabel("Temps (t)")
plt.ylabel("y(t)")
plt.title(f"Solution de y' = {a}*y + {b} avec y({t0}) = {y0}")
plt.grid(True)
```

```
plt.legend()
plt.show()
```



{Modèle=Yp+(Yo-Yp)*Exp(-(X-Xo)/Tau)}
Yp=0.9227
Yo=0.03891
Xo=0.004031
Tau=0.1106

Vérification par la méthode d'Euler

t	v(Euler, p=20ms)	v(Euler, p=40ms)	v
0	0	0	0
0,02	0,165	0,330	0,221
0,04	0,293		
0,06	0,392	0,512	0,3315
0,08	0,469		
0,1	0,529	0,612	0,4972
0,12	0,575		
0,14	0,611	0,668	0,6077
0,16	0,639		
0,18	0,661	0,699	0,6354
0,2	0,678		
0,22	0,691	0,715	0,663
0,24	0,701		
0,26	0,709	0,725	0,7182
0,28	0,715		
0,3	0,720	0,730	0,7182
0,32	0,724		
0,34	0,726	0,733	0,7182
0,36	0,729		
0,38	0,730	0,734	0,7182
0,4	0,732		
0,42	0,733	0,735	0,7459
0,44	0,734		
0,46	0,734	0,736	0,7182
0,48	0,735		
0,5	0,735	0,736	0,7182
0,52	0,735		
0,54	0,736	0,736	0,7459
0,56	0,736		
0,58	0,736	0,736	0,7182
0,6	0,736		
0,62	0,736	0,736	0,7182
0,64	0,736		
0,66	0,736	0,736	0,7182
0,68	0,736		
0,7	0,736	0,736	0,7182
0,72	0,736		
0,74	0,736	0,736	0,7182