Feuille d'exercices 19
ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Exercice 1. On a $t-w=(1,0,0)$, $v-u=(0,1,0)$ puis $u-(t-w)=(0,0,2)=2*(0,0,1)$. Donc la base canonique de $\mathbb{R}^3$ appartient à $\mathrm{Vect}(u,v,w,t)$; donc (u,v,w,t) est génératrice de $\mathbb{R}^3$.
On a $v-u=w-v$, donc $w=2v-u$; donc, dans la famille (u,v,w,t), le vecteur w est redondant : $\mathrm{Vect}(u,v,w,t)=\mathrm{Vect}(u,v,t)$. La sous-famille (u,v,t) est donc encore génératrice de $\mathbb{R}^3$, donc, comme elle est de cardinal $3=\dim(\mathbb{R}^3)$, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2. Les vecteurs u et v sont manifestement non colinéaires, donc la famille (u,v) est libre. Notons $e_1=(1,0,0,0)$ et $e_3=(0,0,1,0)$; on montre que la sur-famille (u,v,e_1,e_3) est encore libre. Comme elle est de cardinal $4=\dim(\mathbb{R}^4)$, c'est une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 3.

(a) Soient $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 u+\lambda_2 v+\lambda_3 w=0_E$, alors :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1+2\lambda_2-\lambda_3 &=& 0\\ -\lambda_1-\lambda_3 &=& 0\\ -\lambda_1+2\lambda_2+2\lambda_3 &=& 0\\ -\lambda_1-\lambda_3 &=& 0 \end{array}\right. \quad \text{donc} \quad \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1+2\lambda_2-\lambda_3 &=& 0\\ -\lambda_1-\lambda_3 &=& 0\\ 2\lambda_1-3\lambda_3 &=& 0 \end{array}\right.$$

donc $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$. Donc la famille $\mathcal{F}$ est libre.

(b) Directement : $u,v,w\in G$. De plus, $\dim(G)=3=\mathrm{Card}(\mathcal{F})$, donc, comme $\mathcal{F}$ est libre, $\mathcal{F}$ est une base de G.

(c) Il suffit de compléter $\mathcal{F}$ avec n'importe quel vecteur qui n'est pas dans G, par exemple $e_4=(0,0,0,1)$. Alors $\mathcal{F}\cup(e_4)$ est une base de E.

Exercice 5.

(e) Une base de E_5 est la famille $((2^n))$, donc $\dim(E_5)=1$.

(f) Une base de E_6 est la famille $((X-1)(X-2),X(X-1)(X-2))$, donc $\dim(E_6)=2$.

(g) Une base de E_7 est la famille (e_2,e_3,e_4), donc $\dim(E_7)=3$.

(h) Une base de E_8 est la famille $((4,4,2,1))$, donc $\dim(E_8)=1$.

Exercice 6. Comme u et v satisfont aux conditions vérifiées par les vecteurs de G, $F\subset G$.
Or, comme la famille (u,v) est libre, $\dim(F)=2$; et d'autre part, on peut vérifier que $\dim(G)=2$.
Donc F est un sous-espace vectoriel de G de même dimension que G ; donc $F=G$.

Exercice 7. Comme $-2+3\times 2+4\times 0-5\times 3=-11\neq 0$, $(-2,2,0,3)\notin F$. Donc F et G sont en somme directe, donc, d'après la formule de Grassmann :

$$\dim(F+G)=\dim(F)+\dim(G)=3+1=4=\dim(E).$$

Donc, comme $F+G\subset E$, $F+G=E$. Donc F et G sont supplémentaires dans E.

Exercice 8.

(a) Soit $M = (m_{ij}) \in S$, alors M est déterminée par les m_{ij} pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tels que $i \leq j$. Donc $\dim(S) = \text{Card}\left(\{(i, j) \in [\![1, n]\!]^2 \mid i \leq j\}\right) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
De même, soit $M = (m_{ij}) \in A$, alors M est déterminée par les m_{ij} pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tels que $i < j$. Donc $\dim(A) = \text{Card}\left(\{(i, j) \in [\![1, n]\!]^2 \mid i < j\}\right) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

(b) La seule matrice à la fois symétrique et antisymétrique est la matrice nulle, donc S et A sont en somme directe. Donc, d'après la formule de Grassmann :

$$\dim(S + A) = \dim(S) + \dim(A) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2 = \dim(M_n(\mathbb{K})).$$

Donc, comme $S + A \subset M_n(\mathbb{K})$, $S + A = M_n(\mathbb{K})$. Donc S et A sont supplémentaires dans $M_n(\mathbb{K})$.

Exercice 9.

(a) Soit $u \in \text{Vect}(u_0) \cap H$. Il existe alors $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda u_0$. Si $\lambda \neq 0$, alors $\dfrac{1}{\lambda} u = u_0 \in H$, ce qui est absurde. Donc $\lambda = 0$, donc $u = 0_E$. Donc $\text{Vect}(u_0)$ et H sont en somme directe.
De plus, on a directement : $\dim(H) + \dim\left(\text{Vect}(u_0)\right) = (n - 1) + 1 = n = \dim(E)$.
Donc, d'après la formule de Grassmann, $\text{Vect}(u_0)$ et H sont supplémentaires dans E.

(b) Comme H et H' sont non confondus, il existe $u_0 \in H' \backslash H$. D'après la question précédente, $\text{Vect}(u_0)$ et H sont supplémentaires dans E ; donc, en particulier : $H + H' = E$.
D'après la formule de Grassmann, on a alors :

$$\dim(H \cap H') = \dim(H) + \dim(H') - \dim(H + H') = (n - 1) + (n - 1) - n = n - 2.$$

Exercice 10.

(e) $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(1 - i)$, donc $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$. D'après le théorème du rang, on a donc $\text{rg}(f) = \dim(\mathbb{C}) - \dim(\text{Ker}(f)) = 2 - 1 = 1$.

(f) $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(X + 1)$, donc $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$. D'après le théorème du rang, on a donc $\text{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}_3[X]) - \dim(\text{Ker}(f)) = 4 - 1 = 3$.

(g) $\text{Ker}(f) = A_n(\mathbb{R})$, donc $\dim(\text{Ker}(f)) = \dfrac{n(n-1)}{2}$. D'après le théorème du rang, on a donc $\text{rg}(f) = \dim(M_n(\mathbb{R})) - \dim(\text{Ker}(f)) = n^2 - \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

(h) Si $a = \dfrac{1}{2}$: $\text{Ker}(f) = \text{Vect}((1, -1, 0))$, donc $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$. D'après le théorème du rang, on a donc $\text{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\text{Ker}(f)) = 3 - 1 = 2$.
Si $a \neq \dfrac{1}{2}$: $\text{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, donc $\dim(\text{Ker}(f)) = 0$. D'après le théorème du rang, on a donc $\text{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\text{Ker}(f)) = 3 - 0 = 3$.

Exercice 13. Notons E l'espace sur lequel agit u.
Soit x_0 un vecteur directeur de $\text{Im}(u)$. On a : $\forall x \in E,\ \exists \lambda_x \in \mathbb{K},\ u(x) = \lambda_x x_0$. Alors :

$$\forall x \in E,\ u^2(x) = \lambda_x u(x_0) = \lambda_x \lambda_{x_0} x_0 = \lambda_{x_0} u(x),$$

donc $u^2 = \lambda_{x_0} u$.

Exercice 14.

(a) On a : $(f-2\mathrm{Id}_E)\circ(f-\mathrm{Id}_E)=(f-\mathrm{Id}_E)\circ(f-2\mathrm{Id}_E)=0_{\mathcal{L}(E)}$.
Soit $v\in\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id}_E)$, alors il existe $u\in E$ tel que $v=(f-\mathrm{Id}_E)(u)$. Donc $(f-2\mathrm{Id}_E)(v)=(f-2\mathrm{Id}_E)\circ(f-\mathrm{Id}_E)(u)=0_{\mathcal{L}(E)}(u)=0_E$. Donc $\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id}_E)\subset\mathrm{Ker}(f-2\mathrm{Id}_E)$. Symétriquement, $\mathrm{Im}(f-2\mathrm{Id}_E)\subset\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)$.

(b) Soit $u\in\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)\cap\mathrm{Ker}(f-2\mathrm{Id}_E)$. Alors $f(u)=u=2u$, donc $u=0_E$. Donc $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(f-2\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe.
De plus, d'après la question précédente, $\mathrm{rg}(f-\mathrm{Id}_E)\leq\dim\left(\mathrm{Ker}(f-2\mathrm{Id}_E)\right)$, donc, d'après le théorème du rang :

$$\begin{aligned}\dim(E) &= \dim\left(\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)\right)+\mathrm{rg}(f-\mathrm{Id}_E)\\ &\leq \dim\left(\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)\right)+\dim\left(\mathrm{Ker}(f-2\mathrm{Id}_E)\right)\\ &\leq \dim\left(\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)+\mathrm{Ker}(f-2\mathrm{Id}_E)\right),\end{aligned}$$

donc, comme $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)+\mathrm{Ker}(f-2\mathrm{Id}_E)\subset E$, $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)+\mathrm{Ker}(f-2\mathrm{Id}_E)=E$. Donc $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(f-2\mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 15. Soit $u\in E$. Alors $(f+g)(u)=f(u)+g(u)\in\mathrm{Im}(f)+\mathrm{Im}(g)$, donc $\mathrm{Im}(f+g)\subset\mathrm{Im}(f)+\mathrm{Im}(g)$. Donc $\mathrm{rg}(f+g)\leq\mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g)$.
De plus, $f=(f+g)+(-g)$, donc, d'après ce qu'on vient de montrer : $\mathrm{rg}(f)\leq\mathrm{rg}(f+g)+\mathrm{rg}(-g)=\mathrm{rg}(f+g)+\mathrm{rg}(g)$, donc $\mathrm{rg}(f+g)\geq\mathrm{rg}(f)-\mathrm{rg}(g)$; et, de même, $\mathrm{rg}(f+g)\geq\mathrm{rg}(g)-\mathrm{rg}(f)$, donc $\mathrm{rg}(f+g)\geq|\mathrm{rg}(f)-\mathrm{rg}(g)|$.

Exercice 16. Comme $f\circ f=0_{\mathcal{L}(E)}$, $\mathrm{Im}(f)\subset\mathrm{Ker}(f)$. Réciproquement, soit $u\in\mathrm{Ker}(f)$. Alors $(f\circ g+g\circ f)(u)=u$, donc $f(g(u))=u$, donc $u\in\mathrm{Im}(f)$. Donc $\mathrm{Ker}(f)\subset\mathrm{Im}(f)$, donc $\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Im}(f)$.
Donc, d'après le théorème du rang, $n=2\mathrm{rg}(f)$. Donc n est pair.

Exercice 17.

(a) Supposons qu'un tel u existe. Alors, d'après le théorème du rang :

$$n=\mathrm{rg}(u)+\dim(\mathrm{Ker}(u))=2\mathrm{rg}(u),$$

donc n est pair.
Réciproquement, supposons n pair, et notons $n=2p$ et $(e_1,\dots,e_{2p})$. une base de E. Alors l'application $u:e_k\mapsto e_{k+p}$ si $k\leq p$, 0_E sinon, convient.

(b) Il suffit de prendre une base $u_1,\dots,u_p$ de $\mathrm{Im}(u)$, puis, pour tout $k\in[\![1,p]\!]$, e_k tel que $u_k=u(e_k)$.

Exercice 18. Il faut et il suffit que $\dim(F)+\dim(G)=n$. En effet, c'est une condition nécessaire d'après le théorème du rang ; réciproquement, notons $p=\dim(F)$ et $q=\dim(G)$. Supposons que $p+q=n$. Soit $(v_1,\dots,v_q)$ une base de G, que l'on complète en une base de E $(v_1,\dots,v_n)$. Soit $(u_1,\dots,u_p)$ une base de F, alors l'application $u:v_k\mapsto 0_E$ si $k\leq q$, u_{k-q} sinon, convient.