

Devoir à la maison n° 12

CORRIGÉ

Exercice 1.

- Notons $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$ l'ensemble des issues possibles du lancer de deux dés. L'événement A_1 est alors le sous-ensemble $\{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$. La probabilité étant uniforme, on a donc $\mathbb{P}(A_1) = \frac{\text{Card}(A_1)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{5}{36}$.
- Notons B_0 l'événement « La somme des dés donne 7 ». Par le même raisonnement qu'à la question précédente, $\mathbb{P}(B_0) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. L'événement B_1 est alors $B_1 = \overline{A_1} \cap B_0$. Les lancers de dés étant indépendants les uns des autres, on a donc : $\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(\overline{A_1}) \times \mathbb{P}(B_0) = \frac{31}{36} \times \frac{1}{6} = \frac{31}{216}$.
- Pour qu'Alice gagne à son $n^{\text{ème}}$ lancer, il faut que personne n'ait gagné précédemment. Notons A_n l'événement « Alice gagne à son $n^{\text{ème}}$ lancer » ; les lancers étant mutuellement indépendants, on a donc : $\mathbb{P}(A_n) = \left(\frac{31}{36} \times \frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \frac{5}{36}$.
- Notons A'_n l'événement « Alice gagne en n lancers ou moins », alors $A'_n = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$; les événements A_k étant incompatibles deux à deux, on a donc :

$$a_n = \mathbb{P}(A'_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) = \frac{1 - q^n}{1 - q} \times \frac{5}{36}, \quad \text{où } q = \frac{31}{36} \times \frac{5}{6}.$$

- Avec des notations similaires, on a : $\mathbb{P}(B_n) = \left(\frac{31}{36} \times \frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \frac{31}{36} \times \frac{1}{6}$, donc :

$$b_n = \mathbb{P}(B'_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(B_k) = \frac{1 - q^n}{1 - q} \times \frac{31}{36} \times \frac{1}{6}, \quad \text{où } q = \frac{31}{36} \times \frac{5}{6}.$$

- D'après les calculs précédents, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{1 - q} \times \frac{5}{36} = \frac{30}{61}$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \frac{1}{1 - q} \times \frac{31}{36} \times \frac{1}{6} = \frac{31}{61}$.
Donc Bob a le plus de chances de gagner.

Exercice 2.

1. Comme F est l'ensemble des vecteurs (x, y, z, t) de \mathbb{R}^4 solutions du système linéaire homogène
$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y - t = 0 \end{cases},$$
 c'est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 . De plus :

$$(x, y, z, t) \in F \Leftrightarrow y = -x = t \Leftrightarrow (x, y, z, t) = y(-1, 1, 0, 1) + z(0, 0, 1, 0),$$

donc la famille $((-1, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 0))$ est génératrice de F . Elle est également libre (car ses deux vecteurs ne sont pas colinéaires), donc c'est une base de F , et donc $\dim F = 2$.

2. On a $e_1 = -2e_2 + 5e_3$, donc la famille (e_1, e_2, e_3) est liée.
3. Comme u et v ne sont pas colinéaires, la famille (u, v) est libre. Comme cette famille est génératrice de G par définition de G , c'est donc une base de G , et $\dim G = 2$.
4. Comme $e_1 = u + v$, $e_2 = 2u - 3v$ et $e_3 = u - v$, $\text{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ est inclus dans G . C'est plus précisément un sous-espace vectoriel de G contenant la famille libre (e_1, e_2) , donc de dimension ≥ 2 . Donc, comme G est de dimension 2, $\text{Vect}(e_1, e_2, e_3) = G$.
5. D'après les questions précédentes, $\dim \mathbb{R}^4 = 4 = \dim F + \dim G$. Il suffit donc de montrer que $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$.

Soit $w \in F \cap G$. Comme $w \in G$, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $w = \lambda u + \mu v = (\lambda - \mu, 0, \mu, \lambda + \mu)$, et comme $w \in F$, on a :
$$\begin{cases} \lambda - \mu = 0 \\ -(\lambda + \mu) = 0 \end{cases},$$
 d'où $\lambda = \mu = 0$. Donc $w = 0_{\mathbb{R}^4}$, et donc $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$.

Donc $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$.