

Devoir Libre 8 : Précession du périhélie de Mercure

À rendre pour le jeudi 18 juin

- les réponses illisibles ne seront pas corrigées ;
- indiquez le numéro de chaque question traitée en respectant la numérotation de l'énoncé ;
- si vous constatez ce qui vous paraît être une erreur d'énoncé, vous l'indiquez dans votre copie et vous poursuivez votre rédaction, en précisant, le cas échéant, les initiatives que vous êtes amené à prendre.

A. Mouvement orbital d'une planète

On étudie dans cette partie le mouvement orbital d'une planète autour du Soleil. Le référentiel d'étude est le référentiel de Kepler, supposé galiléen, défini par son origine au barycentre du système solaire et trois axes pointés vers trois étoiles supposées fixes. La masse du Soleil étant beaucoup plus grande que celle de toutes les planètes et autres corps constituant le système solaire, nous confondrons le barycentre du système solaire et le centre du Soleil O . La planète est assimilée à un point matériel, de masse m , situé au point M à un instant donné, avec $OM = r$. On note M_S la masse du Soleil et G la constante de la gravitation universelle. On suppose dans cette partie que la planète n'est soumise qu'à l'action du Soleil. On repère la position de M par ses coordonnées polaires r et θ dans le plan orbital.

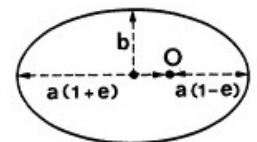
1. Justifier que l'orbite est plane et que la grandeur $C = r^2\dot{\theta}$ est constante. Donner et justifier le nom donné à C .
2. Montrer que l'énergie mécanique E_m de la planète s'écrit

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,\text{eff}}(r)$$

et exprimer l'énergie potentielle effective $E_{p,\text{eff}}(r)$, en fonction de r , m , M_S , C et G .

3. Tracer en justifiant l'allure de la courbe de $E_{p,\text{eff}}(r)$.
4. Déterminer le rayon r_c correspondant à une trajectoire circulaire en fonction de l'énergie mécanique E_m associée. Commenter le signe de E_m .

Dans le cas plus général, une trajectoire fermée est une ellipse de foyer O , caractérisée par son demi-grand axe a et son excentricité e (figure ci-contre) telle que $b = a\sqrt{1 - e^2}$.



5. Comment trouver graphiquement les distances minimale (au point appelé *périhélie*) et maximale (au point appelé *aphélie*) de la planète au Soleil ? Quelles sont les valeurs possibles pour E_m ?

B. Caractérisation d'une trajectoire fermée

Une planète d'énergie potentielle $E_p(r)$ (fonction quelconque de r), initialement sur une orbite circulaire de rayon r_c , subit à un instant donné une petite variation de r sans changement de C . Cette variation initiale de r est à l'origine d'« oscillations radiales » (oscillations de la fonction $r(t)$) caractérisées par une période T_r .

6. Montrer que :

$$T_r = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\left. \frac{d^2 E_{p,\text{eff}}(r)}{dr^2} \right|_{r=r_c}}} \quad \text{où} \quad \left. \frac{d^2 E_{p,\text{eff}}(r)}{dr^2} \right|_{r=r_c} \text{ est la dérivée seconde de } E_{p,\text{eff}} \text{ en } r = r_c$$

On pourra se ramener au modèle de l'oscillateur harmonique d'un point de vue énergétique.

7. En supposant que la période orbitale T (période de révolution sidérale) a peu varié par rapport à celle du mouvement circulaire (petite perturbation), montrer que :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m r_c}{\left. \frac{dE_p(r)}{dr} \right|_{r=r_c}}}$$

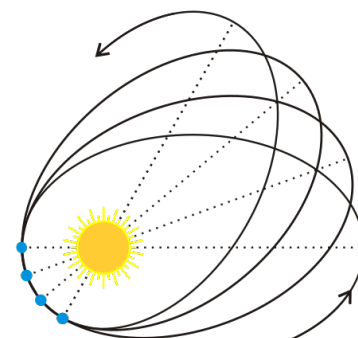
8. Une trajectoire fermée est caractérisée par le fait qu'au bout du temps T , la planète se retrouve au même point de l'espace. Comparer alors T_r et T dans le cas le plus simple.

9. Étudier le cas où $E_p(r) = -G \frac{m M_S}{r}$. Était-ce prévisible ?

C. Calcul numérique de la trajectoire de Mercure

L'ellipse décrivant la trajectoire d'une planète autour du Soleil dans le référentiel de Kepler semble tourner lentement dans le plan orbital (voir schéma ci-contre). La droite passant par le centre du Soleil et le périhélie de la planète (point le plus proche du Soleil) tourne : ce phénomène s'appelle la précession du périhélie.

Cette précession est très lente mais est plus marquée pour Mercure (la planète la plus proche du Soleil) que pour les autres planètes. La valeur mesurée pour Mercure à partir des observations astronomiques est d'environ seulement $575''/\text{siècle}$! Rappel : $1'' = 1 \text{ seconde d'arc} = 1/3600^\circ$



Dès le milieu du 19^{ème} siècle les scientifiques furent capables d'expliquer environ 90% de cette valeur par les perturbations gravitationnelles causées par les autres planètes. Il restait 43 secondes inexpliquées. C'est Einstein qui retrouva cette valeur en 1914 grâce à sa théorie de la Relativité Générale !

10. Calculer le nombre de siècles pour que le périhélie de Mercure fasse un tour.

La théorie de la Relativité Générale montre que l'énergie potentielle de Mercure due à la force gravitationnelle du Soleil s'écrit :

$$E_p(r) = -\frac{G m M_S}{r} \left(1 + \frac{\alpha}{r^2} \right) \quad \text{où} \quad \alpha = 8,7 \cdot 10^{13} \text{ m}^2.$$

Pour les calculs numériques on prendra $\alpha = 2 \cdot 10^{19} \text{ m}^2$ pour que l'effet de précession soit bien visible.

Mercure se trouve à son périhélie à $t = 0$ en P à la distance r_p du centre du Soleil S et avec une vitesse v_p orthoradiale, c'est-à-dire selon $\vec{e}_\theta$ en coordonnées polaires dans son plan de révolution.

On utilisera aussi le repère cartésien $(S, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ où $\vec{e}_x = \frac{\vec{SP}}{r_p}$ et $\vec{e}_y = \frac{\vec{v}_p}{v_p}$.

11. Faire un schéma en indiquant S, P, le début de la trajectoire (quasi) elliptique, une position M quelconque de Mercure, les coordonnées polaires r et θ , le vecteur vitesse initial $\vec{v}_p$, le vecteur force de gravitation exercée par le Soleil sur Mercure en P et en M.

12. Montrer que les composantes cartésiennes du vecteur accélération de Mercure s'écrivent :

$$a_x = -GM_S \left(1 + 3 \frac{\alpha}{r^2} \right) \frac{x}{r^3} \quad \text{et} \quad a_y = -GM_S \left(1 + 3 \frac{\alpha}{r^2} \right) \frac{y}{r^3}$$

13. On souhaite résoudre les équations du mouvement avec la fonction `odeint` de Python.

On rappelle que `odeint` résout des équations du 1^{er} ordre du type $\dot{Y} = f(Y, t)$. Elle prend comme arguments la fonction f , la valeur initiale Y_0 et la liste de temps commençant à t_0 . Elle renvoie le tableau (`numpy.array`) des valeurs Y_i . L'avantage de `odeint` est que Y peut être un vecteur. En posant $Y = [x, y, v_x, v_y]$, on a alors $\dot{Y} = [v_x, v_y, a_x, a_y]$.

- Téléchargez et complétez le code Python sur le site PrépaBellevue ;
- l'exécuter et le tester ;
- le nommer « votre(vos)_nom(s)_DM8 » et le déposer dans le dossier « Dépôt_DM8 ».

14. Commenter l'allure des courbes obtenues.

D. Calcul de la vitesse de précession de Mercure

On constate expérimentalement que l'orbite de la planète Mercure n'est pas rigoureusement une ellipse. De fait, le grand axe de l'ellipse tourne avec le temps (mouvement de précession) et la trajectoire de la planète n'est plus fermée. On appelle $\Delta\omega$ l'angle dont a tourné le grand axe de la (quasi) ellipse lorsque la planète effectue une révolution.

Cette précession peut s'expliquer essentiellement par la présence des autres planètes, présence qui perturbe l'orbite de Mercure par interaction newtonienne, et par une correction relativiste. C'est cette correction que nous allons calculer de manière approchée.

15. Quelle est la dimension du rapport $\frac{GM_S}{r_c}$?

16. Supposons que $\Delta\omega$ soit fonction uniquement de G , M_S , r_c et c_0 (vitesse de la lumière dans le vide). Écrire $\Delta\omega$ sous la forme d'une fonction monôme de ces quatre grandeurs. On fera intervenir une constante sans dimension que l'analyse dimensionnelle ne permet pas de calculer. Pourquoi fait-on intervenir c_0 ? Que pensez-vous de la dépendance de $\Delta\omega$ avec c_0 ?

17. L'excentricité de l'orbite de Mercure est $e = 0,2056$. Nous supposons dans la suite que cette orbite est proche du cercle, de manière à pouvoir utiliser la méthode introduite dans la partie B. Que pensez-vous de cette approximation ?

Pour introduire la correction relativiste, nous utiliserons le même formalisme que dans les parties précédentes. On rappelle l'expression de l'énergie potentielle de Mercure prévue par la Relativité Générale :

$$E_p(r) = -\frac{G m M_S}{r} \left(1 + \frac{\alpha}{r^2}\right) \quad \text{où} \quad \alpha = 8,7 \cdot 10^{13} \text{ m}^2$$

18. Écrire une relation entre r_c (rayon de l'orbite circulaire pour cette énergie potentielle), la constante des aires C , α , m et M_S .

19. Vérifier par un calcul que le terme relativiste dans l'expression de l'énergie potentielle est bien négligeable.

20. Montrer que

$$T_r = T \left(1 + \frac{3\alpha}{r_c^2}\right)$$

et en déduire qu'on a une avance du périhélie de Mercure.

21. Calculer $\Delta\omega$ en fonction de G , M_S , r_c et c_0 , sachant que $\alpha = \frac{C^2}{c_0^2}$.

22. Calculer $\Delta\omega$ en radians par révolution, puis en secondes d'arc par siècle. Comparer à la valeur $43''$ par siècle donnée dans les tables.

Valeurs numériques

Vitesse de la lumière dans le vide	c_0	$3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Constante de gravitation universelle	G	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Masse du Soleil	M_S	$1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
Masse de la planète Mercure	m	$3,30 \cdot 10^{23} \text{ kg}$
Période de révolution de Mercure	T	$0,241 \text{ an}$
Rayon moyen de l'orbite de Mercure autour du Soleil	r_c	$57,9 \cdot 10^6 \text{ km}$
Distance Soleil - périhélie de Mercure	r_p	$46,0 \cdot 10^6 \text{ km}$
Vitesse de Mercure au périhélie	v_p	$59,0 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$