

Devoir à la maison n° 13

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel de dimension 3, soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E , et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par :

$$u(e_1) = 2e_1 + e_3, \quad u(e_2) = e_1 + 2e_3, \quad u(e_3) = 2e_1 + e_2.$$

1. Déterminer la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que u est un automorphisme de E .
2. On pose :

$$\mathcal{B}' = (e'_1 = 7e_1 + e_2 + 3e_3, e'_2 = -3e_1 + e_2 + 2e_3, e'_3 = e_1 - e_2)$$

une autre base de E . Calculer $M_{\mathcal{B}}(u(e'_1))$, puis déterminer la matrice de u dans la base $\mathcal{B}'$.

3. Montrer que $u^3 = 2u^2 + 4u - 3\text{Id}_E$.
4. En déduire que pour tout n dans $\mathbb{Z}$, il existe $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u^n = \alpha_n u^2 + \beta_n u + \gamma_n \text{Id}_E$.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le déterminant de taille n : $\Delta_n =$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

1. Montrer que $\Delta_1 = 3$ et $\Delta_2 = 7$. Que vaut Δ_3 ?
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta_{n+2} = 3\Delta_{n+1} - 2\Delta_n$.
3. En déduire Δ_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.