

Devoir à la maison n° 13

CORRIGÉ

Exercice 1.

1. D'après l'énoncé, $M_{\mathcal{B}}(u(e_1)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, et de même $M_{\mathcal{B}}(u(e_2)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $M_{\mathcal{B}}(u(e_3)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \text{ En développant le déterminant de cette matrice par rapport à la deuxième}$$

ligne, on trouve $\det u = -1 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, donc u est un automorphisme de E .

2. On a $M_{\mathcal{B}}(e'_1) = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, puis $M_{\mathcal{B}}(u(e'_1)) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(u)M_{\mathcal{B}}(e'_1) = \begin{pmatrix} 21 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} = 3M_{\mathcal{B}}(e'_1)$, donc $u(e'_1) = 3e'_1$.

De même : $M_{\mathcal{B}}(u(e'_2)) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(u) \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $u(e'_2) = -\frac{1}{2}e'_2 - \frac{5}{2}e'_3$, et $M_{\mathcal{B}}(u(e'_3)) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(u) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $u(e'_3) = -\frac{1}{2}e'_2 - \frac{1}{2}e'_3$.

Donc $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$

3. On a $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(u^2) = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(u)^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 36 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 10 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix},$

puis $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(u^3) = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -216 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 8 \\ 0 & 40 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & -2 \end{pmatrix} = 2M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(u^2) + 4M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(u) - 3I_3$, donc

$$u^3 = 2u^2 + 4u - 3\text{Id}_E.$$

4. L'assertion est triviale pour $n = 0, 1, 2$ et vraie pour $n = 3$ d'après la question précédente. Supposons-la vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors $u^{n+1} = \alpha_n u^3 + \beta_n u^2 + \gamma_n u = (2\alpha_n + \beta_n)u^2 + (4\alpha_n + \gamma_n)u - 3\alpha_n \text{Id}_E$, donc elle est vraie au rang $n + 1$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence.

De plus, $u(u^2 - 2u - 4\text{Id}_E) = -3\text{Id}_E$, donc $u^{-1} = -\frac{1}{3}(u^2 - 2u - 4\text{Id}_E)$. Donc l'assertion est vraie pour $n = -1$, puis, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2.

1. On a $\Delta_1 = |3| = 3$, et $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \times 3 - 2 \times 1 = 7$. Ensuite, par développement par rapport à la première colonne :

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \times 7 - 2 \times 3 = 15.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On développe par rapport à la première colonne :

$$\begin{aligned} \Delta_{n+2} &= 3\Delta_{n+1} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 3\Delta_{n+1} - 2\Delta_n. \end{aligned}$$

3. D'après la question précédente, la suite (Δ_n) est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = 0$. Les racines de cette équation sont $r_{1,2} = 1, 2$, donc il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta_n = \lambda + \mu \cdot 2^n$. Comme $\Delta_1 = \lambda + 2\mu = 3$ et $\Delta_2 = \lambda + 4\mu = 7$, on en déduit $2\mu = 4$, donc $\mu = 2$, puis $\lambda = -1$, d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta_n = 2^{n+1} - 1.$$