

Devoir surveillé n° 9

Durée : 3 heures. Calculatrices non autorisées.

La notation tiendra largement compte de la qualité de la rédaction.

Les résultats doivent être encadrés. Il est inutile de recopier l'énoncé.

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre souhaité.

Les exercices qui ne sont pas traités dans l'ordre doivent être rédigés sur des copies séparées.

Le sujet et le brouillon ne sont pas à rendre. Le barème est indicatif.

Exercice 1. (8 points)

Soient $n \geq 3$ et $p \geq 1$ deux entiers. On effectue p lancers d'un dé équilibré à n faces.

Pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on note X_k la variable aléatoire indicatrice de l'événement « le résultat obtenu au $k^{\text{ème}}$ lancer n'avait jamais été obtenu avant ». On a donc $X_k = 1$ si cet événement est réalisé, et $X_k = 0$ sinon.

Par convention, la variable X_1 est constante égale à 1.

1. Déterminer la loi de X_2 .
2. Soit $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Montrer que X_k suit la loi de Bernoulli de paramètre $\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}$.
3. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$ tel que $i < j$.
 - (a) Montrer que $\mathbb{P}((X_i = 1) \cap (X_j = 1)) = \frac{(n-2)^{i-1}(n-1)^{j-i}}{n^{j-1}}$.
 - (b) Les variables X_i et X_j sont-elles indépendantes ?
 - (c) Déterminer la loi de la variable $X_i X_j$.
4. On note Z_p la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus lors des p lancers. Exprimer Z_p en fonction des X_k .
5. En déduire l'espérance de Z_p , puis la limite de celle-ci lorsque p tend vers $+\infty$. Interpréter.

Exercice 2. (6 points) On considère l'application linéaire $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto (3x + y + z, 4y + 2z, x - y + 5z) \end{cases}$.

On note β_0 la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer la matrice A de l'application f dans la base β_0 .
2. Calculer le déterminant de la matrice A . Que peut-on en déduire sur l'application f ?
3. On pose $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (0, 1, 1)$ et $u_3 = (1, 0, 1)$.
Montrer que $\beta = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. On note B la matrice de l'application f dans la base β . Montrer que $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer B^n .
6. On note P la matrice de passage de la base β_0 vers la base β . Soit $n \in \mathbb{N}$.
Déterminer l'expression de A^n en fonction de B^n , P et P^{-1} , et calculer A^n .

Exercice 3. (6 points) Dans une usine, deux ateliers 1 et 2 fabriquent des pièces toutes semblables. L'atelier 1 fabrique chaque jour deux fois plus de pièces que l'atelier 2. Chaque pièce de l'atelier 1 a une probabilité de 5% d'être défectueuse, contre 3% pour l'atelier 2.

1. On prend au hasard une pièce fabriquée dans cette usine.
 - (a) Calculer la probabilité que la pièce vienne de l'atelier 1, et celle qu'elle vienne de l'atelier 2.
 - (b) Quelle est la probabilité que la pièce provienne de l'atelier 2 et qu'elle ne soit pas défectueuse ?
 - (c) Quelle est la probabilité que la pièce soit défectueuse ?
 - (d) Sachant que la pièce est défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle vienne de l'atelier 1 ?
2. On prélève successivement et au hasard des pièces dans le stock de l'usine, supposé infini. À partir de combien de pièces a-t-on au moins une chance sur deux d'avoir prélevé au moins une pièce défectueuse ?

Problème. (14 points)

On considère deux urnes U_1 et U_2 qui contiennent initialement une boule blanche et une boule noire chacune. On effectue une suite de tirages dans ces deux urnes selon le protocole suivant : à chaque nouveau tirage, on tire une boule dans l'urne U_1 et une boule dans l'urne U_2 et on échange les boules d'urne (c'est-à-dire que la boule tirée dans U_1 est mise dans l'urne U_2 , et inversement).

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n le nombre de boules blanches présentes dans l'urne U_1 à l'issue du $n^{\text{ème}}$ tirage, et :

$$a_n = \mathbb{P}(X_n = 0), \quad b_n = \mathbb{P}(X_n = 1), \quad c_n = \mathbb{P}(X_n = 2), \quad Y_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}, \quad M = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- I.
 1. Déterminer la loi de la variable X_0 , puis la loi de la variable X_1 . On notera $E = X_1(\Omega)$.
 2. Calculer l'espérance et la variance de la variable X_1 .
 3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer, pour tout $(i, j) \in E^2$, $\mathbb{P}_{X_n=i}(X_{n+1} = j)$.
 4. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_{n+1} , b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n , b_n et c_n .
 5. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n + 2c_n = 1$. Interpréter ce résultat vis-à-vis de l'espérance de X_n .
 6. Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $Y_{n+1} = MY_n$.
- II. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2a_n - b_n + 2c_n$. À l'aide des résultats précédents :
 1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique, et déterminer son terme général.
 2. Déterminer des expressions explicites pour a_n , b_n et c_n .
 3. Déterminer les limites de ces suites quand n tend vers $+\infty$. Interpréter.
- III. On note β_0 la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice M , c'est-à-dire que $M_{\beta_0}^{\beta_0}(f) = M$.
 1. On note, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $P(\lambda) = \det(M - \lambda I_3)$. Montrer que $-2P(\lambda) = 2\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda$.
 2. Déterminer les racines $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ du polynôme P .
 3. Pour $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, justifier qu'il existe $u_i \in \mathbb{R}^3$ non nul tel que $f(u_i) = \lambda_i u_i$. Calculer et choisir u_1 , u_2 , u_3 .
 4. On note $\beta = (u_1, u_2, u_3)$.
 - i. Montrer que β est une base de $\mathbb{R}^3$.
 - ii. Déterminer la matrice D de l'application f dans cette base.
 5. Soit P la matrice de passage de β_0 à β . On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Z_n = P^{-1}Y_n$.
 - i. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer Z_{n+1} en fonction de Z_n , puis Z_n en fonction de Z_0 .
 - ii. Retrouver les expressions explicites de a_n , b_n et c_n trouvées dans la partie précédente.