

Devoir surveillé n° 9

CORRIGÉ

Exercice 1.

1. On a $X_2(\Omega) = \{0, 1\}$. L'événement « $X_2 = 0$ » signifie que le résultat du deuxième lancer est égal à celui du premier lancer. Comme le dé est équilibré, tous les résultats sont équiprobables ; donc $\mathbb{P}(X_2 = 0) = \frac{1}{n}$, et $\mathbb{P}(X_2 = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_2 = 0) = \frac{n-1}{n}$. La variable X_2 suit donc la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{n-1}{n}$.

2. On a $X_k(\Omega) = \{0, 1\}$.

L'événement « $X_k = 1$ » est l'événement $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{k-1}$, où, pour tout $j \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$, A_j est l'événement « le résultat du $j^{\text{ème}}$ lancer est distinct du résultat du $k^{\text{ème}}$ lancer ». On a : $\forall j \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$, $\mathbb{P}(A_j) = \frac{n-1}{n}$,

donc, comme les lancers sont indépendants : $\mathbb{P}(X_k = 1) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}$. La variable X_k suit donc la loi de

Bernoulli de paramètre $\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}$.

3. (a) L'événement $(X_i = 1) \cap (X_j = 1)$ est l'événement $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{i-1} \cap B_i \cap C_{i+1} \cap \dots \cap C_{j-1}$, où :

- pour tout $k \in \llbracket 1, i-1 \rrbracket$, A_k est l'événement « le résultat du $k^{\text{ème}}$ lancer est distinct des résultats du $i^{\text{ème}}$ et du $j^{\text{ème}}$ lancer » ; on a $\mathbb{P}(A_k) = \frac{n-2}{n}$,
- B_j est l'événement « le résultat du $i^{\text{ème}}$ lancer est distinct du résultat du $j^{\text{ème}}$ lancer » ; on a $\mathbb{P}(B_j) = \frac{n-1}{n}$,
- pour tout $k \in \llbracket i+1, j-1 \rrbracket$, C_k est l'événement « le résultat du $k^{\text{ème}}$ lancer est distinct du résultat du $j^{\text{ème}}$ lancer » ; on a $\mathbb{P}(C_k) = \frac{n-1}{n}$,

donc, comme les lancers sont indépendants :

$$\mathbb{P}((X_i = 1) \cap (X_j = 1)) = \left(\frac{n-2}{n}\right)^{i-1} \times \frac{n-1}{n} \times \left(\frac{n-1}{n}\right)^{j-i-1} = \frac{(n-2)^{i-1}(n-1)^{j-i}}{n^{j-1}}.$$

(b) On a manifestement $\mathbb{P}((X_i = 1) \cap (X_j = 1)) \neq \mathbb{P}(X_i = 1)\mathbb{P}(X_j = 1)$, donc X_i et X_j ne sont pas indépendantes.

(c) On a encore $X_i X_j(\Omega) = \{0, 1\}$, avec $\mathbb{P}(X_i X_j = 1) = \mathbb{P}((X_i = 1) \cap (X_j = 1)) = \frac{(n-2)^{i-1}(n-1)^{j-i}}{n^{j-1}}$.

La variable $X_i X_j$ suit donc la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{(n-2)^{i-1}(n-1)^{j-i}}{n^{j-1}}$.

4. Par construction : $Z_p = \sum_{k=1}^p X_k$.

5. Par linéarité de l'espérance, et d'après les propriétés usuelles de la loi de Bernoulli, on a :

$$E(Z_p) = \sum_{k=1}^p E(X_k) = \sum_{k=1}^p \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} = \frac{1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^p}{1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)}.$$

Donc $E(Z_p) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)} = n$.

C'est cohérent : après un grand nombre de lancers, on peut s'attendre à avoir obtenu tous les résultats possibles.

Exercice 2.

1. On a $A = M_{\beta_0}^{\beta_0}(f) = M_{\beta_0} f(\beta_0) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

2. On développe par rapport à la première colonne : $\det(A) = 3 \times \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times 22 + (-2) = 64$.

Comme $\det(A) \neq 0$, f est bijective ; et donc $f \in GL(\mathbb{R}^3)$.

3. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$, alors : $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$, d'où $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$,

d'où $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Donc β est une famille libre de 3 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ de dimension 3, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

4. On a $f(u_1) = (4, 4, 0) = 4u_1$, $f(u_2) = (2, 6, 4) = 2u_1 + 4u_2$ et $f(u_3) = (4, 2, 6) = 2u_2 + 4u_3$, donc $B = M_{\beta}^{\beta}(f)$ a l'expression voulue.

5. Notons $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0_3$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $B = 4I_3 + 2N$, on a d'après la formule du binôme de Newton :

$$B^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2N)^k (4I_3)^{n-k} = 4^n I_3 + 2n \times 4^{n-1} N + \frac{n(n-1)}{2} \times 4^{n-1} N^2 = \begin{pmatrix} 2^{2n} & n2^{2n-1} & n(n-1)2^{2n-3} \\ 0 & 2^{2n} & n2^{2n-1} \\ 0 & 0 & 2^{2n} \end{pmatrix}.$$

6. On a $A = M_{\beta_0}^{\beta_0}(f) = P_{\beta_0}^{\beta} M_{\beta}^{\beta}(f) P_{\beta}^{\beta_0} = P B P^{-1}$, donc $A^n = (P B P^{-1})^n = P B^n P^{-1}$.

Or $P = M_{\beta_0}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, et d'après la méthode du pivot, $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, donc :

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{2n} & n2^{2n-1} & n(n-1)2^{2n-3} \\ 0 & 2^{2n} & n2^{2n-1} \\ 0 & 0 & 2^{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2^{2n-4} \begin{pmatrix} n^2 - 5n + 16 & n(5-n) & n(n+3) \\ n(n-1) & 16+n-n^2 & n(n+7) \\ 4n & -4n & 4(n+4) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 3.

- 1) a) Notons ω_{1d} , ω_{1c} , ω_{2d} , ω_{2c} les résultats possibles de l'expérience, où ω_{1d} est le tirage d'une pièce défectueuse provenant de l'atelier 1, ω_{1c} est le tirage d'une pièce conforme provenant de l'atelier 1, et de même pour l'atelier 2. On a donc $\Omega = \{\omega_{1d}, \omega_{1c}, \omega_{2d}, \omega_{2c}\}$.

Notons A_1 l'événement « la pièce provient de l'atelier 1 » et A_2 l'événement « la pièce provient de l'atelier 2 ». On a donc $A_1 = \{\omega_{1d}, \omega_{1c}\}$ et $A_2 = \{\omega_{2d}, \omega_{2c}\} = \overline{A_1}$.

La famille (A_1, A_2) forme donc un système complet d'événements, donc $\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) = 1$. De plus, d'après l'énoncé, $\mathbb{P}(A_1) = 2\mathbb{P}(A_2)$. On en déduit que $\mathbb{P}(A_1) = \frac{2}{3}$ et $\mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{3}$.

- b) Notons C l'événement « la pièce est conforme ». On cherche $\mathbb{P}(A_2 \cap C)$. D'après l'énoncé, $\mathbb{P}_{A_2}(\overline{C}) = \frac{3}{100}$, donc $\mathbb{P}_{A_2}(C) = 1 - \mathbb{P}_{A_2}(\overline{C}) = \frac{97}{100}$.

D'après la formule des probabilités composées, $\mathbb{P}(A_2 \cap C) = \mathbb{P}_{A_2}(C) \times \mathbb{P}(A_2)$, donc d'après la question 1), $\mathbb{P}(A_2 \cap C) = \frac{97}{100} \times \frac{1}{3} = \frac{97}{300}$.

- c) On cherche $\mathbb{P}(\overline{C})$. Comme (A_1, A_2) est un système complet d'événements, on a, d'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(\overline{C}) = \mathbb{P}_{A_1}(\overline{C}) \times \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}_{A_2}(\overline{C}) \times \mathbb{P}(A_2),$$

et d'après l'énoncé, $\mathbb{P}_{A_1}(\overline{C}) = \frac{5}{100}$ et $\mathbb{P}_{A_2}(\overline{C}) = \frac{3}{100}$. D'après la question 1), on a donc : $\mathbb{P}(\overline{C}) = \frac{2}{3} \times \frac{5}{100} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{100} = \frac{13}{300}$.

- d) On cherche $\mathbb{P}_{\overline{C}}(A_1)$. D'après la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}_{\overline{C}}(A_1) = \frac{\mathbb{P}_{A_1}(\overline{C}) \times \mathbb{P}(A_1)}{\mathbb{P}(\overline{C})},$$

donc d'après les données précédentes : $\mathbb{P}_{\overline{C}}(A_1) = \frac{\frac{5}{100} \times \frac{2}{3}}{\frac{13}{300}} = \frac{10}{13}$.

- 2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, considérons l'espace probabilisé $(\Omega_n, \mathbb{P}_n)$ qui modélise le prélèvement de n pièces. On a donc $\Omega_n = \{\omega_d, \omega_c\}^n$, où ω_d est le prélèvement d'une pièce défectueuse et ω_c est le prélèvement d'une pièce conforme.

Notons B l'événement « on a prélevé au moins une pièce défectueuse ». On cherche $\mathbb{P}_n(B)$. Comme $B = \Omega_n \setminus \{(\omega_c, \dots, \omega_c)\}$, on a $\mathbb{P}_n(B) = 1 - \mathbb{P}_n(\{(\omega_c, \dots, \omega_c)\})$.

Notons, pour tout i dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, A_i l'événement « la $i^{\text{ème}}$ pièce prélevée est conforme ». On a donc $\{(\omega_c, \dots, \omega_c)\} = A_1 \cap \dots \cap A_n$, et d'après la question 1)c) : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathbb{P}_n(A_i) = \mathbb{P}(C) = 1 - \mathbb{P}(\overline{C}) = \frac{287}{300}$. De plus, d'après l'énoncé, les événements A_i sont mutuellement indépendants, donc

$$\mathbb{P}_n(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}_n(A_i) = \left(\frac{287}{300}\right)^n, \text{ et finalement : } \mathbb{P}_n(B) = 1 - \left(\frac{287}{300}\right)^n.$$

On cherche N tel que : $\forall n \geq N$, $\mathbb{P}_n(B) \geq \frac{1}{2}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\mathbb{P}_n(B) \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{287}{300}\right)^n \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{287}{300}\right)^n \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(2)}{\ln(300) - \ln(287)}.$$

Donc $N = E\left(\frac{\ln(2)}{\ln(300) - \ln(287)}\right) + 1$, où E désigne la partie entière, convient.

Problème.

- I. 1. Par définition, la variable X_0 est constante égale à 1.

On a $X_1(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

Lors du 1^{er} tirage, notons B_1 l'événement « la boule tirée de l'urne 1 est blanche », et de même N_1 , B_2 et N_2 . Ces quatre événements ont pour probabilité $\frac{1}{2}$.

L'événement « $X_1 = 0$ » est alors l'événement $B_1 \cap N_2$. Les événements B_1 et N_2 étant indépendants, on a donc $\mathbb{P}(X_1 = 0) = \frac{1}{4}$.

De même, l'événement « $X_1 = 1$ » est l'événement $(B_1 \cap B_2) \sqcup (N_1 \cap N_2)$, donc $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Enfin, l'événement « $X_1 = 2$ » est l'événement $N_1 \cap B_2$, donc $\mathbb{P}(X_1 = 2) = \frac{1}{4}$.

2. On a directement : $E(X_1) = 1 \times \mathbb{P}(X_1 = 1) + 2 \times \mathbb{P}(X_1 = 2) = 1$.

De plus, $E(X_1^2) = 1 \times \mathbb{P}(X_1 = 1) + 4 \times \mathbb{P}(X_1 = 2) = \frac{3}{2}$, donc $V(X_1) = E(X_1^2) - E(X_1)^2 = \frac{1}{2}$.

3. Si $X_n = 0$, alors les deux boules blanches sont dans l'urne 2. Il n'y a donc qu'une possibilité :

$$\mathbb{P}_{X_n=0}(X_{n+1} = 0) = 0, \quad \mathbb{P}_{X_n=0}(X_{n+1} = 1) = 1, \quad \mathbb{P}_{X_n=0}(X_{n+1} = 2) = 0.$$

Si $X_n = 1$, on est dans le cas de départ. D'après la question 1., on a donc :

$$\mathbb{P}_{X_n=1}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}_{X_n=1}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}_{X_n=1}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{4}.$$

Si $X_n = 2$, alors les deux boules blanches sont dans l'urne 1. Il n'y a donc, là aussi, qu'une possibilité :

$$\mathbb{P}_{X_n=2}(X_{n+1} = 0) = 0, \quad \mathbb{P}_{X_n=2}(X_{n+1} = 1) = 1, \quad \mathbb{P}_{X_n=2}(X_{n+1} = 2) = 0.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, et d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{4}b_n, \\ b_{n+1} &= a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n, \\ c_{n+1} &= \frac{1}{4}b_n. \end{aligned}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a directement :

$$b_{n+1} + 2c_{n+1} = a_n + b_n + c_n = \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

De plus, $b_0 + 2c_0 = 1 + 2 \times 0 = 1$. Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, b_n + 2c_n = 1$.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, E(X_n) = b_n + 2c_n = 1$. L'espérance de X_n reste donc constante égale à 1.

6. Il s'agit simplement de la forme matricielle du résultat de la question 4.

- II. 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2a_{n+1} - b_{n+1} + 2c_{n+1} \\ &= \frac{1}{2}b_n - \left(a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n\right) + \frac{1}{2}b_n \\ &= -a_n + \frac{1}{2}b_n - c_n \\ &= -\frac{1}{2}u_n, \end{aligned}$$

donc la suite (u_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{2}$. Comme $u_0 = 2a_0 - b_0 + 2c_0 = -1$, on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On résout le système :

$$\begin{cases} a_n + b_n + c_n = 1 \\ b_n + 2c_n = 1 \\ 2a_n - b_n + 2c_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \end{cases} \quad \text{de solution} \quad \begin{cases} a_n = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \frac{(-1)^n}{2^n} \\ b_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \frac{(-1)^n}{2^n} \\ c_n = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \frac{(-1)^n}{2^n} \end{cases}.$$

3. On a directement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{6}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \frac{2}{3}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \frac{1}{6}.$$

Asymptotiquement, il y a donc par exemple équilibre des couleurs après $\frac{2}{3}$ des tirages.

III. 1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$P(\lambda) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \begin{vmatrix} -4\lambda & 1 & 0 \\ 4 & 2-4\lambda & 4 \\ 0 & 1 & -4\lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{64} \left(-4\lambda \begin{vmatrix} 2-4\lambda & 4 \\ 1 & -4\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 0 & -4\lambda \end{vmatrix} \right) = -\frac{1}{2} (2\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda).$$

2. Les racines de P sont les racines du polynôme $2X^3 - X^2 - X = X(2X^2 - X - 1) = X(X-1)(2X+1)$, donc $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$.

3. Soit $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$. On a $\det(M - \lambda_i I_3) = 0$, donc l'application $f - \lambda_i \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ est non bijective. En particulier, son noyau n'est pas réduit à 0, donc il existe $u_i \in \mathbb{R}^3$ non nul tel que $(f - \lambda_i \text{Id}_{\mathbb{R}^3})(u_i) = 0_{\mathbb{R}^3}$, c'est-à-dire que $f(u_i) = \lambda_i u_i$.

Notons $u_1 = (x, y, z)$. On a :

$$f(u_1) = -\frac{1}{2}u_1 \Leftrightarrow \begin{cases} y & = -2x \\ 4x + 2y + 4z & = -2y \\ y & = -2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & = -2x \\ y & = -2z \end{cases} \Leftrightarrow u_1 = (x, -2x, x),$$

donc $u_1 = (1, -2, 1)$ convient.

De même, $u_2 = (1, 0, -1)$ et $u_3 = (1, 4, 1)$ conviennent.

4. i. Notons $P = M_{\beta_0}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. On calcule le déterminant de P par développement par rapport à la deuxième colonne :

$$\det(P) = - \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 12 \neq 0,$$

donc P est inversible, donc β est une base de $\mathbb{R}^3$.

ii. Notons e_1, e_2, e_3 les vecteurs de β_0 . On remarque que $u_3 - u_1 = 6e_2$, puis $u_1 + u_2 = 2e_1 - 2e_2$

$$\text{et } e_3 = e_1 - u_2, \text{ d'où } P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Alors, d'après la formule de changement de base :

$$D = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. i. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $Z_{n+1} = P^{-1}Y_{n+1} = P^{-1}MY_n = P^{-1}MPZ_n = DZ_n$, donc, par une récurrence immédiate : $Z_n = D^n Z_0$.
- ii. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après le résultat précédent :

$$Y_n = PZ_n = PD^n Z_0,$$

avec $Z_0 = P^{-1}Y_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ 0 \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$. Donc :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ 0 \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \frac{(-1)^n}{2^n} \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \frac{(-1)^n}{2^n} \\ \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \frac{(-1)^n}{2^n} \end{pmatrix}.$$

On retrouve bien les résultats de la partie II.