

Devoir Libre 8 : Précession du périhélie de Mercure

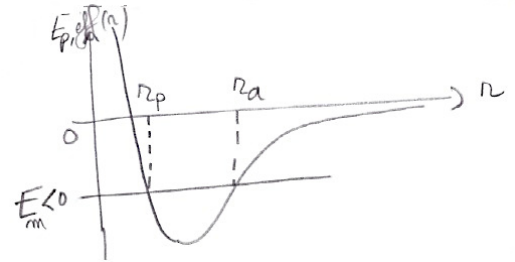
Correction [44 pts]

1. [1pt] Voir cours.

2. [1pt] Voir cours. L'énergie potentielle effective s'écrit : $E_{p,\text{eff}}(r) = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} - \frac{G m M_S}{r}$.

3. [1pt]

L'énergie potentielle effective est la somme d'une fonction positive en $1/r^2$ et d'une fonction négative en $-1/r$: la courbe présente une cuvette et a l'allure ci-contre.



4. [2pts] Application du PFD pour un mouvement circulaire de rayon r_c :

$$m \frac{v^2}{r_c} = G \frac{m M_S}{r_c^2} \implies v^2 = \frac{G M_S}{r_c}.$$

L'énergie mécanique vaut alors :

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{G m M_S}{r_c} = \frac{1}{2} m \frac{G M_S}{r_c} - \frac{G m M_S}{r_c} \implies E_m = -\frac{G m M_S}{2 r_c}.$$

On a donc $E_m < 0$ car une trajectoire circulaire correspond à un état lié.

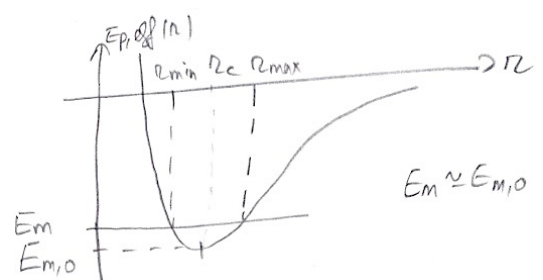
5. [2pts] Au périhélie et à l'aphélie, $\dot{r} = 0$, donc

$$E_m = E_{p,\text{eff}}(r).$$

Graphiquement, les abscisses des points d'intersection de la droite $E_m = \text{cste}$ avec la courbe $E_{p,\text{eff}}(r)$ donnent r_p et r_a avec $r_a > r_p$. Pour une trajectoire elliptique, $E_m < 0$ (état lié).

6. [3*1pts]

Initialement, la planète décrit une trajectoire circulaire, donc $E_{m,0}$ est au minimum de $E_{p,\text{eff}}(r)$ (en $r = r_c$). Sans changer C (donc sans changer $E_{p,\text{eff}}$), on augmente légèrement E_m : la trajectoire devient elliptique et r varie autour de r_c entre $r_{\min}$ et $r_{\max}$ proches de r_c .



$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{p,\text{eff}}(r).$$

Au voisinage de r_c , on effectue le développement limité :

$$E_{p,\text{eff}}(r) = E_{p,\text{eff}}(r_c) + \left. \frac{dE_{p,\text{eff}}}{dr} \right|_{r=r_c} (r - r_c) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 E_{p,\text{eff}}}{dr^2} \right|_{r=r_c} (r - r_c)^2.$$

Comme $E_{p,\text{eff}}$ est minimale en $r = r_c$, $\left. \frac{dE_{p,\text{eff}}}{dr} \right|_{r=r_c} = 0$, d'où :

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{p,\text{eff}}(r_c) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 E_{p,\text{eff}}}{dr^2} \right|_{r=r_c} (r - r_c)^2.$$

On reconnaît l'énergie d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{m} \frac{d^2 E_{p,\text{eff}}}{dr^2}} \Big|_{r=r_c}$ et l'on peut écrire

$$r(t) = r_c + A \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Ainsi, $r(t)$ varie sinusoidalement autour de r_c , avec une période $T_r = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\frac{d^2 E_{p,\text{eff}}}{dr^2} \Big|_{r=r_c}}}$.

7. [3*1 pts] La force centrale dérivant de l'énergie potentielle $E_p(r)$ s'écrit

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p(r) = -\frac{dE_p}{dr} \vec{u}_r.$$

Le principe fondamental de la dynamique pour un mouvement circulaire de rayon r_c donne alors

$$m \frac{v^2}{r_c} = \frac{dE_p}{dr} \Big|_{r=r_c} \quad \text{avec} \quad v = \frac{2\pi r_c}{T}.$$

Donc

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m r_c}{\frac{dE_p}{dr} \Big|_{r=r_c}}}.$$

8. [1 pt] Si la trajectoire est fermée, alors au bout de la durée T la planète revient à sa position initiale, donc

$$r(t) = r(t + T) \Rightarrow T_r = T.$$

Remarque : on exclut ici les cas particuliers où T est un multiple de T_r .

9. [3*1 pts] Dans le cas newtonien,

$$E_{p,\text{eff}}(r) = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} - \frac{GmM_S}{r} \quad \text{car} \quad E_p(r) = -\frac{GmM_S}{r}.$$

On calcule

$$\frac{dE_{p,\text{eff}}}{dr} = -m \frac{C^2}{r^3} + GmM_S \frac{1}{r^2}, \quad \frac{d^2 E_{p,\text{eff}}}{dr^2} = 3m \frac{C^2}{r^4} - 2GmM_S \frac{1}{r^3}.$$

Pour un mouvement circulaire de rayon r_c ,

$$C = r_c^2 \dot{\theta} = r_c v \quad \text{avec} \quad v = \sqrt{\frac{GM_S}{r_c}} \Rightarrow C^2 = GM_S r_c.$$

Ainsi

$$\frac{d^2 E_{p,\text{eff}}}{dr^2} \Big|_{r=r_c} = 3m \frac{GM_S}{r_c^3} - 2Gm \frac{M_S}{r_c^3} = \frac{GmM_S}{r_c^3}.$$

On en déduit

$$T_r = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\frac{d^2 E_{p,\text{eff}}}{dr^2} \Big|_{r=r_c}}} = 2\pi \sqrt{\frac{r_c^3}{GM_S}}.$$

Or

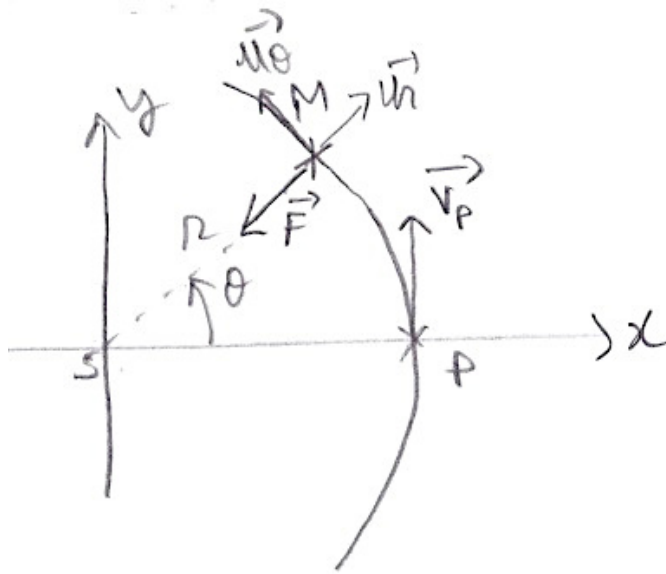
$$\frac{dE_p}{dr} \Big|_{r=r_c} = \frac{GmM_S}{r_c^2} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{mr_c}{GmM_S/r_c^2}} = 2\pi \sqrt{\frac{r_c^3}{GM_S}}.$$

$$T_r = T.$$

C'est cohérent : dans un potentiel newtonien, les états liés correspondent à des trajectoires fermées (ellipses).

10. [1 pt] On note $\omega_0 = 575''/\text{siècle}$ la vitesse angulaire de précession. Un tour correspond à une rotation de la (quasi) ellipse de $360^\circ = 360 \times 3600''$ donc la durée cherchée vaut $\frac{360 \times 3600}{575} \text{ siècles} \approx 2254 \text{ siècles}$.

11. [2 pts]



12. [2 pts] Pour $E_p(r) = -\frac{GM_S m}{r} \left(1 + \frac{\alpha}{r^2}\right)$, on a

$$E_p(r) = -GM_S m \left(\frac{1}{r} + \frac{\alpha}{r^3}\right) \Rightarrow \frac{dE_p}{dr} = GM_S m \left(\frac{1}{r^2} + \frac{3\alpha}{r^4}\right).$$

Ainsi

$$\vec{F} = -\vec{\text{grad}} E_p(r) = -\frac{dE_p}{dr} \vec{u}_r = -GM_S m \left(\frac{1}{r^2} + \frac{3\alpha}{r^4}\right) \vec{u}_r.$$

Avec $\vec{u}_r = \cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y$, le PFD $m\vec{a} = \vec{F}$ donne

$$\begin{cases} ma_x = -GM_S m \left(\frac{1}{r^2} + \frac{3\alpha}{r^4}\right) \cos \theta, \\ ma_y = -GM_S m \left(\frac{1}{r^2} + \frac{3\alpha}{r^4}\right) \sin \theta, \end{cases}$$

soit, en utilisant $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$,

$$\begin{cases} a_x = -GM_S \left(1 + \frac{3\alpha}{r^2}\right) \frac{x}{r^3}, \\ a_y = -GM_S \left(1 + \frac{3\alpha}{r^2}\right) \frac{y}{r^3}. \end{cases}$$

13. [5*1 pts] Programme Python

14. [2 pts] On observe sur la première courbe le mouvement d'oscillations radiales qui ressemblent à des oscillations harmoniques (voir question 6) et le mouvement de précession sur l'autre courbe.

15. [1 pt] $\frac{GM_S}{r_c}$ est homogène au carré d'une vitesse.

16. [2 pts]

$$\frac{GM_S}{r_c} \text{ a pour unité } \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \Rightarrow \frac{GM_S}{r_c c_0^2} \text{ est sans dimension, comme } \Delta\omega.$$

Ainsi, on peut écrire $\Delta\omega = K \frac{GM_S}{r_c c_0^2}$, où K est un coefficient sans dimension.

En mécanique classique, $c_0 \rightarrow +\infty$ donc $\Delta\omega = 0$: la précession calculée ici est un effet relativiste.

17. [1 pt]

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2} = \sqrt{1 - (0,2056)^2} \simeq 0,96 \approx 1.$$

L'approximation par une trajectoire circulaire semble donc justifiée.

18. [1 pt]

$$\frac{\alpha}{r_c^2} \simeq \frac{8,7 \cdot 10^{13} \text{ m}^2}{(58 \cdot 10^9 \text{ m})^2} \simeq 2,6 \cdot 10^{-8} \ll 1,$$

donc le terme relativiste est négligeable devant le terme newtonien.

19. [2 pts] La valeur de r_c correspond au minimum de $E_{p,\text{eff}}(r)$:

$$E_{p,\text{eff}}(r) = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} + E_p(r) = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} - \frac{GmM_S}{r} \left(1 + \frac{\alpha}{r^2} \right).$$

Ainsi,

$$\frac{dE_{p,\text{eff}}}{dr} = -m \frac{C^2}{r^3} + GmM_S \left(\frac{1}{r^2} + \frac{3\alpha}{r^4} \right),$$

et $\frac{dE_{p,\text{eff}}}{dr}(r_c) = 0$ donne $\boxed{\frac{C^2}{r_c} = GM_S \left(1 + \frac{3\alpha}{r_c^2} \right)}$.

20. [2*2 pts]

$$\frac{d^2 E_{p,\text{eff}}}{dr^2} = 3m \frac{C^2}{r^4} - 2GmM_S \frac{1}{r^3} - 12\alpha GmM_S \frac{1}{r^5},$$

donc, en utilisant l'expression précédente de C^2 ,

$$\left. \frac{d^2 E_{p,\text{eff}}}{dr^2} \right|_{r=r_c} = \frac{GmM_S}{r_c^3} \left(1 - \frac{3\alpha}{r_c^2} \right).$$

La période des petites oscillations radiales vaut alors

$$T_r = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\left. \frac{d^2 E_{p,\text{eff}}}{dr^2} \right|_{r=r_c}}} = 2\pi \sqrt{\frac{r_c^3}{GM_S \left(1 - \frac{3\alpha}{r_c^2} \right)}} \simeq 2\pi \sqrt{\frac{r_c^3}{GM_S} \left(1 + \frac{3\alpha}{2r_c^2} \right)}.$$

Or la période orbitale est

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{mr_c}{\left. \frac{dE_p}{dr} \right|_{r=r_c}}} = 2\pi \sqrt{\frac{r_c^3}{GM_S \left(1 + \frac{3\alpha}{r_c^2} \right)}} \simeq 2\pi \sqrt{\frac{r_c^3}{GM_S} \left(1 - \frac{3\alpha}{2r_c^2} \right)},$$

d'où

$$\boxed{T_r \simeq T \left(1 + \frac{3\alpha}{r_c^2} \right)}.$$

21. [2 pts] Comme $T_r > T$, le périhélie se décale dans le sens de la révolution : il y a avance du périhélie.

En une révolution le grand axe a tourné de,

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T} (T_r - T) = 2\pi \left(\frac{T_r}{T} - 1 \right) \simeq 2\pi \frac{3\alpha}{r_c^2} = \frac{6\pi\alpha}{r_c^2}.$$

Avec $\alpha = \frac{C^2}{c_0^2}$ et $C^2 \simeq GM_S r_c$ (en considérant le cas circulaire et en négligeant la correction relativiste), on obtient

finalement $\boxed{\Delta\omega = \frac{6\pi GM_S}{r_c c_0^2}}.$

22. [2 pts] En $T = 0,241$ an, le grand axe de l'ellipse a tourné de $\Delta\omega = 6\pi \frac{G M_S}{r_c c_0^2}$.

Application numérique :

$$\Delta\omega = 6\pi \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} \times 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{5,79 \cdot 10^{10} \text{ m} \times (3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2} = 4,80 \cdot 10^{-7} \text{ rad} = 2,75 \cdot 10^{-5}^\circ = 9,9 \cdot 10^{-2}''.$$

Comme un siècle vaut 100 ans, cela représente environ $N \simeq \frac{100 \text{ an}}{0,241 \text{ an}} \simeq 415$ révolutions, donc

$$\Delta\omega_{\text{siècle}} \simeq N \Delta\omega \simeq 41,1''.$$

Conclusion : le résultat est assez proche de la valeur tabulée ; les approximations faites sont justifiées.