

Feuille d'exercices 22

ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Exercice 1.

$$(b) \quad \forall n \geq 2, \quad \frac{1}{\binom{n}{2}} = \frac{2}{n(n-1)} = \frac{2}{n-1} - \frac{2}{n}.$$

La série considérée est télescopique, donc convergente puisque la suite $\left(\frac{2}{n}\right)$ est convergente. On a :

$$\forall n \geq 2, \quad \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{\binom{k}{2}} = \frac{2}{1} - \frac{2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2,$$

$$\text{donc } \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\binom{n}{2}} = 2.$$

Exercice 2. On a : $\frac{1}{\tan x} - \frac{2}{\tan 2x} = \frac{1}{\tan x} - \frac{2(1 - \tan^2 x)}{2 \tan x} = \tan x$, donc :

$$\forall n \geq 1, \quad \frac{1}{2^n} \tan \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}} - \frac{1}{2^{n-1} \tan \frac{\pi}{2^n}}.$$

La série de terme général $\frac{1}{2^n} \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}$ est ainsi télescopique, donc converge puisque :

$$\frac{1}{2^n \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2^n \frac{\pi}{2^{n+1}}} = \frac{2}{\pi},$$

c'est-à-dire que la suite $\left(\frac{1}{2^n \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}}\right)$ est convergente. On a :

$$\forall n \geq 1, \quad \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \tan \frac{\pi}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^n \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}} - 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi},$$

donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \tan \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{2}{\pi}.$$

Exercice 3. On applique la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $\exp$ (de classe C^∞) à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ entre 0 et x :

$$\begin{aligned} \exp(x) &= \sum_{k=0}^n \exp^{(k)}(0) \frac{(x-0)^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \exp^{(n+1)}(t) dt \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt, \end{aligned}$$

avec :

$$\left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt \right| \leq \max(e^x, 1) \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt \right| = \max(e^x, 1) \frac{|x|^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

donc : $\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^x$; c'est-à-dire que la série de terme général $\frac{x^n}{n!}$ converge, avec :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

Exercice 5.

(g) Par croissances comparées : $\left(\frac{e}{n}\right)^n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{n^2}\right)$. Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge d'après le critère de Riemann, donc, par comparaison, $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{e}{n}\right)^n$ converge.

(h) $\forall n \geq 1$:

$$\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{n} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{\frac{1}{n}}}{n} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^{2-\frac{1}{n}}} = \underset{n \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge d'après le critère de Riemann, donc, par comparaison, $\sum_{n \geq 1} \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$ converge.

(i) On a : $0 \leq \frac{1}{n^2 - \ln n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$, où $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge d'après le critère de Riemann, donc, par équivalence, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 - \ln n}$ converge.

(j) On a : $0 \leq \frac{\text{ch}(n)}{\text{ch}(2n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^n}{e^{2n}} = \frac{1}{e^n}$, où $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{e^n}$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{e} \in]-1, 1[$, donc convergente. Donc, par équivalence, $\sum_{n \geq 0} \frac{\text{ch}(n)}{\text{ch}(2n)}$ converge.

(k) On a : $0 \leq \frac{\sqrt{n+1}}{n^2(\ln n)^3} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}(\ln n)^3} \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge d'après le critère de Riemann, donc, par comparaison, $\sum_{n \geq 2} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2(\ln n)^3}$ converge.

(l) Si $a > 1$: $0 \leq \frac{a^n}{1+a^{2n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{a^n}$, où $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{a^n}$ est géométrique de raison $\frac{1}{a} \in]-1, 1[$, donc convergente, donc, par équivalence, $\sum_{n \geq 0} \frac{a^n}{1+a^{2n}}$ converge.

Si $a < 1$: $0 \leq \frac{a^n}{1+a^{2n}} \leq a^n$, où $\sum_{n \geq 0} a^n$ est géométrique de raison $a \in]-1, 1[$, donc convergente, donc, par équivalence, $\sum_{n \geq 0} \frac{a^n}{1+a^{2n}}$ converge.

Si $a = 1 : \frac{a^n}{1+a^{2n}} = \frac{1}{2}$, donc $\sum_{n \geq 0} \frac{a^n}{1+a^{2n}}$ diverge grossièrement.

Donc $\sum_{n \geq 0} \frac{a^n}{1+a^{2n}}$ converge si et seulement si $a \neq 1$.

(m) $\frac{(\ln n)^n}{n^{\ln n}} = e^{n \ln(\ln n) - (\ln n)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, donc $\sum_{n \geq 1} \frac{(\ln n)^n}{n^{\ln n}}$ diverge grossièrement.

(n)

$$\begin{aligned} \left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n &= \exp\left(n \ln\left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \\ &= \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{24n^2} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{24n} - \frac{1}{4n} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{5}{24\sqrt{e}n} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

donc $\left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{e}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{5}{24\sqrt{e}n}$. Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge d'après le critère de Riemann, donc,

par équivalence, $\sum_{n \geq 1} \left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{e}}$ diverge.

(o) On a :

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{n^3 + an} - \sqrt{n^2 + 3} &= n \left(\left(1 + \frac{a}{n^2}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(1 + \frac{3}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \right) \\ &= n \left(1 + \frac{a}{3n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) - 1 - \frac{3}{2n^2} \right) \\ &= \left(\frac{a}{3} - \frac{3}{2}\right) \frac{1}{n} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Par comparaison, $\sum O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge ; et $\sum \left(\frac{a}{3} - \frac{3}{2}\right) \frac{1}{n}$ converge si et seulement si $\frac{a}{3} - \frac{3}{2} = 0$,

c'est-à-dire $a = \frac{9}{2}$. Donc $\sum_{n \geq 0} \sqrt[3]{n^3 + an} - \sqrt{n^2 + 3}$ converge si et seulement si $a = \frac{9}{2}$.

Exercice 6. Si $p \leq 1 : u_n \geq \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n}$. Or, d'après le critère de Riemann, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, donc, par

comparaison, $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

Si $p \geq 2 : u_n \leq \frac{(n-1) \times (n-1)!}{(n+2)!} + \frac{n!}{(n+2)!} = \frac{n-1}{n(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Or, d'après le critère de Riemann, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, donc, par comparaison, $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

Exercice 7.

(a) Comme $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, $u_n^2 = o_{n \rightarrow +\infty}(u_n)$. Donc, par comparaison, $\sum u_n^2$ converge,

- (b) $0 \leq \frac{\sqrt{u_n}}{n} = \sqrt{\frac{u_n}{n^2}} \leq \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{1}{n^2} \right)$, donc, par comparaison, $\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ converge,
- (c) $0 \leq \sqrt{u_n u_{2n}} \leq \frac{1}{2} (u_n + u_{2n})$, donc, par comparaison, $\sum \sqrt{u_n u_{2n}}$ converge,
- (d) $\frac{u_n}{1 - u_n} = u_n + O(u_n^2)$, donc, par comparaison, $\sum \frac{u_n}{1 - u_n}$ converge,
- (e) $0 \leq \frac{u_n}{1 + u_n} \leq u_n$ donc, par comparaison, $\sum \frac{u_n}{1 + u_n}$ converge.

Exercice 8. On a classiquement (cf le cours sur les suites extraites) : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(n) \geq n$, donc $\frac{\varphi(n)}{n^2} \geq \frac{1}{n}$. Or, d'après le critère de Riemann, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, donc, par comparaison, $\sum_{n \geq 1} \frac{\varphi(n)}{n^2}$ diverge.

Exercice 9.

- (a) Notons : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{(1 + a_0) \cdots (1 + a_n)}$.

On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n + v_n = v_{n-1}$, c'est-à-dire que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ est la série télescopique

$\sum_{n \geq 1} v_{n-1} - v_n$. Or la suite (v_n) est décroissante et minorée par 0, donc convergente ; donc la série de terme général u_n converge.

- (b) Notons ℓ la limite de la suite (v_n) , on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = v_0 - \ell = \frac{1}{1 + a_0} - \ell.$$

Donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{1}{1 + a_0} \Leftrightarrow \ell = 0.$$

Si $\sum_{n \geq 0} a_n$ diverge : comme $(1 + a_0) \cdots (1 + a_n) \geq a_0 + \cdots + a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, on a : $\ell = 0$.

Si $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge : alors $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $0 \leq \ln(1 + a_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} a_n$. Par équivalence, $\sum_{n \geq 0} \ln(1 + a_n)$ converge donc, c'est-à-dire que $(w_n = \ln(v_n))$ converge. Donc $\ell \neq 0$.

Donc $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{1}{1 + a_0} \Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} a_n$ diverge.

Exercice 10.

- (a) La suite (u_n) est une suite récurrente associée à la fonction $f : x \mapsto xe^{-x}$. Comme $u_0 \in \mathbb{R}_+$, intervalle stable par f , avec : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \leq x$, la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc convergente. Sa limite est l'unique point fixe de f sur $\mathbb{R}_+$, c'est-à-dire 0.
- (b) On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $e^{-u_n} = \frac{u_{n+1}}{u_n}$, donc : $e^{-S_n} = \frac{u_1}{u_0} \frac{u_2}{u_1} \cdots \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_{n+1}}{u_0} = u_{n+1}$, donc $S_n = -\ln(u_{n+1}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Donc la série de terme général u_n diverge.

Exercice 12. On applique la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $\arctan$ (de classe C^∞) à l'ordre $2n + 2 \in \mathbb{N}$ entre 0 et x :

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+2}}{(2n+2)!} \arctan^{(2n+3)}(t) dt,$$

avec :

$$\left| \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+2}}{(2n+2)!} \arctan^{(2n+3)}(t) dt \right| \leq \left| \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+2}}{(2n+2)!} dt \right| = \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

donc la série de terme général $\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ converge, et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan(x).$$

En particulier, pour $x = 1$, on retrouve la *formule de Madhava-Gregory-Leibniz* :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 13. Déterminer la nature des séries suivantes :

(d) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} - \frac{1}{e} = \frac{1}{2en} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc par comparaison, et d'après le critère de Riemann, $\sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} - \frac{1}{e}$ diverge.

(e) $\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1 = \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{8n} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$, où $\sum \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$ converge d'après le critère des séries alternées, $\sum \frac{1}{8n}$ diverge et $\sum O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ converge d'après le critère de Riemann. Donc $\sum_{n \geq 1} \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$ diverge.

(f) Si $\alpha \leq 0$: $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$ diverge grossièrement ;

Si $\alpha > 0$: $\frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{n^{2\alpha}} + O\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right)$, où $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge d'après le critère des séries alternées, et $\sum -\frac{1}{n^{2\alpha}} + O\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right)$ converge si et seulement si $\sum \frac{1}{n^{2\alpha}}$ converge, c'est-à-dire $\alpha > \frac{1}{2}$.

Donc $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$ converge si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.

(g) Si $\alpha \leq 0$: $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$ diverge grossièrement ;

Si $\alpha > 0$: $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}} = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}} - \frac{1}{2n^{\frac{3\alpha}{2}}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{5\alpha}{2}}}\right)$, où $\sum \frac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$ converge d'après le critère des séries alternées, et $\sum -\frac{1}{2n^{\frac{3\alpha}{2}}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{5\alpha}{2}}}\right)$ converge si et seulement si $\sum \frac{1}{n^{\frac{3\alpha}{2}}}$ converge, c'est-à-dire $\alpha > \frac{2}{3}$.

Donc $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$ converge si et seulement si $\alpha > \frac{2}{3}$.

(h) On a :

$$\begin{aligned} \sin\left(\pi \frac{n^3 + 1}{n^2 + 1}\right) &= \sin\left(n\pi \times \frac{1 + \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{1}{n^2}}\right) \\ &= \sin\left(n\pi - \frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= (-1)^n \sin\left(-\frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= (-1)^{n+1} \frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

donc, d'après le critère des séries alternées et par comparaison, $\sum_{n \geq 0} \sin\left(\pi \frac{n^3 + 1}{n^2 + 1}\right)$ converge.

(i) $\frac{(1+n)\sin n}{n^2\sqrt{n}} = O_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ donc par comparaison, $\sum_{n \geq 1} \frac{(1+n)\sin n}{n^2\sqrt{n}}$ converge.