

Feuille d'exercices 23

ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Exercice 1.

- (a) Soit G une primitive de $g : t \mapsto \ln t$. Alors : $\forall x > 0$, $f(x) = G(2x) - G(2)$. Comme G est dérivable, f l'est également par composition, et, par composition également : $\forall x > 0$,

$$f'(x) = 2g(2x) = 2 \ln(2x).$$

- (b) Soit G une primitive de $g : t \mapsto \frac{\cos t}{t}$. Alors : $\forall x \geq 0$, $f(x) = G(3x) - G(x)$, donc :

$$f'(x) = 3g(3x) - g(x) = 3 \frac{\cos 3x}{3x} - \frac{\cos x}{x} = \frac{\cos(3x) - \cos(x)}{x}.$$

- (c) Soit G une primitive de $g : t \mapsto e^{-t^2}$. Alors : $\forall x \geq 0$, $f(x) = G(\sqrt{x}) - G(1)$, donc :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} g(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-x}.$$

- (d) Soit G une primitive de $g : t \mapsto \frac{t}{1+t^4}$. Alors : $\forall x > 0$, $f(x) = G(\sqrt{x}) - G\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$, donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} g(\sqrt{x}) + \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} g\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} + \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Exercice 2.

- (a) Soit G une primitive de $g : t \mapsto \cos(t^2)$. Alors :

$$\forall x \neq 0, \quad \frac{1}{x} \int_{-x}^x \cos(t^2) dt = \frac{G(x) - G(-x)}{x} = 2 \frac{G(x) - G(-x)}{x - (-x)},$$

donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_{-x}^x \cos(t^2) dt = 2G'(0) = 2g(0) = 2.$$

- (b) Soit G une primitive de $g : t \mapsto \frac{1}{(\ln t)^2}$. Alors :

$$\forall x \neq 0, \quad \frac{1}{x} \int_x^{2x} \frac{dt}{(\ln t)^2} = \frac{G(2x) - G(x)}{x} = \frac{G(2x) - G(x)}{2x - x},$$

donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_x^{2x} \frac{dt}{(\ln t)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} G'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\ln x)^2} = 0.$$

(c) Soit G une primitive de $g : t \mapsto \frac{e^t}{t}$. Alors :

$$\forall x \neq 0, \quad \frac{1}{x} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt = \frac{G(2x) - G(x)}{x} = \frac{G(2x) - G(x)}{2x - x},$$

donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt = \lim_{x \rightarrow 0} G'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x} = \infty.$$

(d) Soit G une primitive de $g : t \mapsto \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t}$. Alors :

$$\forall x \neq 0, \quad \frac{1}{x} \int_x^{2x} \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t} dt = \frac{G(2x) - G(x)}{x} = \frac{G(2x) - G(x)}{2x - x},$$

donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_x^{2x} \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} G'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = 0.$$

Exercice 3.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t+i} \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t-i}{1+t^2} dt \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t}{1+t^2} dt - i \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \left[\frac{1}{2} \ln |1+t^2| \right]_0^{\sqrt{3}} - i [\arctan(t)]_0^{\sqrt{3}} \\ &= \ln(2) - i \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Exercice 4. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a :

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{k=0}^{E(x)-1} \int_k^{k+1} E(t) dt + \int_{E(x)}^x E(t) dt \\ &= \sum_{k=0}^{E(x)-1} k + \int_{E(x)}^x E(x) dt \\ &= \frac{E(x)(E(x)-1)}{2} + (x - E(x))E(x). \end{aligned}$$

La fonction F est continue sur $\mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$ puisque E l'est. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $F(n) = \frac{n(n-1)}{2} = \lim_{x \rightarrow n^+} F(x)$,
et :

$$\lim_{x \rightarrow n^-} F(x) = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1 \times (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} = F(n),$$

donc F est continue en n . Donc F est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 5. On a : $\int_0^1 (f(t) - f(1)) dt = 0$. Comme $g : t \mapsto f(t) - f(1)$ est continue sur $[0, 1]$ et d'intégrale nulle, g s'annule en un certain $t_0 \in]0, 1[$, c'est-à-dire que $f(t_0) = f(1)$. D'après le théorème de Rolle, il existe donc $c \in]t_0, 1[\subset]0, 1[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 6. On a : $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2} = \int_0^1 xdx$, donc $\int_0^1 (f(x) - x)dx = 0$. Si f n'a pas de point fixe, alors, comme f est continue : $\forall x \in [0, 1], f(x) > x$ ou $\forall x \in [0, 1], f(x) < x$, donc $\int_0^1 (f(x) - x)dx > 0$ ou $\int_0^1 (f(x) - x)dx < 0$, ce qui est absurde. Donc f admet un point fixe.

Exercice 7. Si f ne s'annule pas sur $]0, 1[$, alors, comme f est continue, $f > 0$ sur $]0, 1[$ ou $f < 0$ sur $]0, 1[$; donc, dans tous les cas, $\int_0^1 f \neq 0$, ce qui est faux. Donc f s'annule sur $]0, 1[$ en un certain a . De même, si f ne s'annule qu'en a , alors la fonction $g : t \mapsto (t - a)f(t)$ est de signe constant sur $]0, 1[$, donc $\int_0^1 g \neq 0$. Or $\int_0^1 g = \int_0^1 tf(t)dt - a \int_0^1 f(t)dt = 0$. Donc f s'annule deux fois sur $]0, 1[$.

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_a^b \cos(nt^2)dt &= \frac{1}{2n} \int_a^b \frac{1}{t} \times 2nt \cos(nt^2)dt \\ &= \frac{1}{2n} \left(\left[\frac{1}{t} \sin(nt^2) \right]_a^b + \int_a^b \frac{\sin(nt^2)}{t^2} dt \right), \end{aligned}$$

où, comme $|\sin| \leq 1$, $\left| \left[\frac{1}{t} \sin(nt^2) \right]_a^b \right| \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = C$, et $\left| \int_a^b \frac{\sin(nt^2)}{t^2} dt \right| \leq \int_a^b \frac{dt}{t^2} = D$, donc :

$$\left| \int_a^b \cos(nt^2)dt \right| \leq \frac{C + D}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \cos(nt^2)dt = 0$.

Exercice 9. Comme f est continue sur $[a, b]$, d'après le théorème de Weierstrass, f est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes. Notons M le maximum de f sur $[a, b]$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n \leq \left(\int_a^b M^n \right)^{\frac{1}{n}} = M(b - a)^{\frac{1}{n}}.$$

De plus : soit $\varepsilon > 0$. Comme M est atteint par f en un certain $c \in [a, b]$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall x \in [a, b], (|x - c| \leq \delta) \Rightarrow (f(x) \geq M - \varepsilon).$$

Comme f est positive sur $[a, b]$, on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n \geq \left(\int_{[a, b] \cap [c - \delta, c + \delta]} (M - \varepsilon)^n \right)^{\frac{1}{n}} \geq (M - \varepsilon) \delta^{\frac{1}{n}}.$$

Or : $(b - a)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et $\delta^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, \quad M - 2\varepsilon \leq I_n \leq M + \varepsilon,$$

c'est-à-dire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = M$.

Exercice 10. Notons $F : x \mapsto \int_0^x f(t)dt$, c'est-à-dire que F est la primitive de f qui s'annule en 0 (d'après le théorème fondamental de l'analyse). La fonction F vérifie donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, F'(x) \leq kF(x),$$

c'est-à-dire $F' - kF \leq 0$. Notons alors $g : x \mapsto e^{-kx}F(x)$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, g'(x) = e^{-kx}(F'(x) - kF(x)) \leq 0.$$

La fonction g est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$. On sait de plus que $g(0) = F(0) = 0$ et que g est positive (car F l'est, puisque f l'est), donc g est identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+$.

Donc F est également nulle, donc $f = F'$ également.

Exercice 11. La $n^{\text{ème}}$ somme de Riemann à droite de la fonction $f : t \mapsto t^2$ entre 1 et 3 s'écrit :

$$D_n(f) = \frac{3-1}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 + k \frac{3-1}{n}\right)^2,$$

donc

$$\begin{aligned} D_n(f) &= \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 + 4\frac{k}{n} + 4\frac{k^2}{n^2}\right) \\ &= \frac{2}{n} \left(n + \frac{4}{n} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{4}{n^2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \\ &= 2 + \frac{4}{n^2}n(n+1) + \frac{4}{3n^3}n(n+1)(2n+1), \end{aligned}$$

donc $D_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2 + 4 + \frac{8}{3} = \frac{26}{3}$. Donc $\int_1^3 t^2 dt = \frac{26}{3}$.

On retrouve bien que $\int_1^3 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_1^3 = \frac{3^3 - 1^3}{3} = \frac{26}{3}$.

Exercice 12. On a : $\int_0^x \cos t dt = \operatorname{Re} \left(\int_0^x e^{it} dt \right)$, où, d'après le théorème des sommes de Riemann :

$$\int_0^x e^{it} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{ikx}{n}},$$

où : $\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{ikx}{n}} = \frac{1 - e^{ix}}{1 - e^{\frac{ix}{n}}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1 - e^{ix}}{-\frac{ix}{n}}$, donc :

$$\int_0^x e^{it} dt = i(1 - e^{ix}),$$

donc : $\int_0^x \cos t dt = \sin(x)$.

En outre : $\int_0^x \sin t dt = \operatorname{Im} \left(\int_0^x e^{it} dt \right) = 1 - \cos(x)$.

Exercice 13.

(d) On a : $\forall n \geq 1, v_n = \ln(u_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$. On reconnaît la $n^{\text{ème}}$ somme de Riemann à droite de la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ entre 0 et 1, donc la suite (v_n) converge, de limite :

$$\int_0^1 f = \int_0^1 \ln(1+x)dx = \int_1^2 \ln(x)dx = [x \ln(x) - x]_1^2 = 2 \ln(2) - 1.$$

Donc la suite (u_n) converge, de limite $e^{2 \ln(2) - 1} = \frac{4}{e}$.

Exercice 15. Soit $x \in \mathbb{R}$. On applique la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 6 à $\sin$ entre 0 et x :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \int_0^x \frac{(x-t)^6}{6!} \sin^{(7)}(t)dt,$$

donc, comme $|\sin^{(7)}| \leq 1$:

$$\left| \sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \right) \right| \leq \left| \int_0^x \frac{(x-t)^6}{6!} dt \right| \leq \frac{|x|^7}{7!}.$$

Exercice 16. Par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= \left[(1-t)^m \frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 + \frac{m}{n+1} \int_0^1 (1-t)^{m-1} t^{n+1} dt \\ &= \frac{m}{n+1} I_{m-1,n+1} \\ &= \frac{m!n!}{(m+n)!} I_{0,m+n} \\ &= \frac{m!n!}{(m+n+1)!}. \end{aligned}$$

Exercice 17.

- | | | |
|---------------------------------------|-------------------------------|--|
| (a) $\ln\left(\frac{8}{5}\right),$ | (e) $3 + \frac{3}{8} \ln(3),$ | (i) $\frac{3\pi}{16},$ |
| (b) $\frac{7}{2},$ | (f) $\ln(3),$ | (j) $\frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2},$ |
| (c) $\frac{e^\pi + 1}{2},$ | (g) $\frac{7}{3},$ | (k) $\frac{1}{3},$ |
| (d) $\frac{\ln(3)}{4} - \frac{1}{6},$ | (h) $2,$ | (l) $\infty.$ |

Exercice 18.

(a) On applique le changement de variable $t = a + b - x$:

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b x f(x) dx \\ &= \int_b^a (a+b-t) f(a+b-t) \times (-dt) \\ &= \int_a^b (a+b-t) f(t) dt \\ &= (a+b) \int_a^b f - I, \end{aligned}$$

donc $I = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(t) dt.$

(b) D'après le résultat ci-dessus :

$$\int_0^\pi \frac{x \sin(x)}{1 + \cos^2(x)} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{1 + \cos^2(x)} dx = [-\arctan(\cos(x))]_0^\pi = 2 \arctan(1) = \frac{\pi}{2}.$$