

Feuille d'exercices 24

ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Exercice 2.

- L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est par définition une forme sur $\mathbb{R}^2$,
- Soient $u = (x_1, y_1)$ et $v = (x_2, y_2)$ dans $\mathbb{R}^2$. Alors :

$$\langle v, u \rangle = 2x_2x_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + 2y_2y_1 = \langle u, v \rangle,$$

donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique,

- Soient $u_1 = (x_1, y_1)$, $u_2 = (x_2, y_2)$ et $v = (z, t)$ dans $\mathbb{R}^2$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\langle \lambda u_1 + \mu u_2, v \rangle = 2(\lambda x_1 + \mu x_2)z + (\lambda x_1 + \mu x_2)t + z(\lambda y_1 + \mu y_2) + 2(\lambda y_1 + \mu y_2)t = \lambda \langle u_1, v \rangle + \mu \langle u_2, v \rangle,$$

donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à gauche ; donc bilinéaire puisqu'elle est symétrique,

- Soit $u = (x, y)$ dans $\mathbb{R}^2$. Alors :

$$\langle u, u \rangle = 2x^2 + 2xy + 2y^2 = x^2 + (x + y)^2 + y^2 \geq 0,$$

et $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$. Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive.

Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3. Soient $u, v \in E$. D'après les identités de polarisation :

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \frac{1}{4} (\|f(u+v)\| - \|f(u-v)\|) = \frac{1}{4} (\|u+v\| - \|u-v\|) = \langle u, v \rangle.$$

Exercice 4. On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz, avec le produit scalaire usuel de $M_n(\mathbb{R})$:

$$\langle A, I_n \rangle^2 \leq \|A\|^2 \|I_n\|^2,$$

c'est-à-dire $\text{tr}(A)^2 \leq n \cdot \text{tr}(A^T A)$, ce qui est la formule voulue.

Exercice 5. Soient $u = (\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, \dots, \sqrt{x_n})$ et $v = (\frac{1}{\sqrt{x_1}}, \frac{1}{\sqrt{x_2}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{x_n}})$.

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz, avec le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$:

$$\langle u, v \rangle^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2,$$

c'est-à-dire

$$n^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}.$$

Exercice 6. Comme $\dim E = \dim \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, il suffit de montrer que f est injective.

Soit $u \in E$, alors :

$$\begin{aligned} u \in \text{Ker}(f) &\Leftrightarrow \langle u, \cdot \rangle = 0_{\mathcal{L}(E, \mathbb{R})} \\ &\Leftrightarrow \forall v \in E, \langle u, v \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \|u\|^2 = 0 \\ &\Rightarrow u = 0_E, \end{aligned}$$

donc $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$, donc f est injective, donc f est un isomorphisme.

Exercice 7.

- $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$: Soit $u \in (F + G)^\perp$. Alors : $\forall v \in F + G, \langle u, v \rangle = 0$. En particulier : $\forall v \in F, \langle u, v \rangle = 0$, donc $u \in F^\perp$, et de même $u \in G^\perp$. Donc $u \in F^\perp \cap G^\perp$.

Réciproquement, soit $u \in F^\perp \cap G^\perp$. Soit $v = v_F + v_G \in F + G$, alors : $\langle u, v \rangle = \langle u, v_F \rangle + \langle u, v_G \rangle = 0$. Donc $u \in (F + G)^\perp$.

Donc $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

- $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$: Soit $u = u_1 + u_2 \in F^\perp + G^\perp$. Soit $v \in F \cap G$, alors : $\langle u, v \rangle = \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle = 0$, donc $u \in (F \cap G)^\perp$. Donc $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$.

De plus, d'après la formule de Grassmann, et comme $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$:

$$\begin{aligned} \dim(F^\perp + G^\perp) &= \dim(F^\perp) + \dim(G^\perp) - \dim(F^\perp \cap G^\perp) \\ &= \dim(E) - \dim(F) - \dim(G) + \dim(F + G) \\ &= \dim(E) - \dim(F \cap G) \\ &= \dim((F \cap G)^\perp). \end{aligned}$$

Donc $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$.

Exercice 8. Considérons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k \in F$ la suite définie par $u_{k,0} = 1$, $u_{k,k} = -1$ et : $\forall n \notin \{0, k\}, u_{k,n} = 0$.

Soit $v \in F^\perp$. Alors : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \langle v, u_k \rangle = 0$, c'est-à-dire : $1 \times v_0 - 1 \times v_k = 0$, soit $v_k = v_0$. La suite v est donc constante donc, comme v est stationnaire à 0, c'est la suite nulle. Donc $F^\perp = \{0_E\}$.

On a donc bien $F + F^\perp = F \neq E$.

Exercice 9. Soit $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$. L'égalité appliquée à $u = e_k$ s'écrit :

$$1 = \sum_{i=1}^p \langle e_k, e_i \rangle^2 = 1 + \sum_{i=1, i \neq k}^p \langle e_k, e_i \rangle^2,$$

d'où : $\forall i \neq k, \langle e_k, e_i \rangle = 0$. La famille $\mathcal{F}$ est donc orthonormée.

En particulier, la famille $\mathcal{F}$ est libre. Supposons qu'elle ne soit pas génératrice de E ; soit alors $v \in E \setminus \text{Vect}(\mathcal{F})$. Quitte à orthonormaliser, on peut supposer que v est orthogonal à tout vecteur de $\mathcal{F}$. Alors :

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^p \langle v, e_i \rangle^2 = 0, \text{ donc } v = 0_E, \text{ ce qui est absurde. Donc } \mathcal{F} \text{ est génératrice de } E; \text{ c'est donc une}$$

base de E , et E est bien euclidien de dimension p .

Exercice 10. On applique l'algorithme de Gram-Schmidt :

- (a) • $e'_1 = e_1 = (1, 1),$
 $e'_2 = e_2 - \frac{\langle e_2, e'_1 \rangle}{\|e'_1\|^2} e'_1 = (1, 0) - \frac{1}{2}(1, 1) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right),$
- $e''_1 = \frac{e'_1}{\|e'_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1),$
 $e''_2 = \frac{e'_2}{\|e'_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1).$
- (b) • $e'_1 = e_1 = (1, 1, -1),$
 $e'_2 = e_2 - \frac{\langle e_2, e'_1 \rangle}{\|e'_1\|^2} e'_1 = (1, -1, 1) + \frac{1}{3}(1, 1, -1) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}(2, -1, 1),$
on prend alors $e'_2 = (2, -1, 1),$
 $e'_3 = e_3 - \frac{\langle e_3, e'_1 \rangle}{\|e'_1\|^2} e'_1 - \frac{\langle e_3, e'_2 \rangle}{\|e'_2\|^2} e'_2 = (-1, 1, 1) + \frac{1}{3}(1, 1, -1) + \frac{2}{6}(2, -1, 1) = (0, 1, 1),$

- $e_1'' = \frac{e_1'}{\|e_1'\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1),$
 $e_2'' = \frac{e_2'}{\|e_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, 1),$
 $e_3'' = \frac{e_3'}{\|e_3'\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1).$

(c) • $e_1' = e_1 = (0, 1, 1, 1),$
 $e_2' = e_2 - \frac{\langle e_2, e_1' \rangle}{\|e_1'\|^2} e_1' = (1, 0, 1, 1) - \frac{2}{3}(0, 1, 1, 1) = \frac{1}{3}(3, -2, 1, 1),$
on prend alors $e_2' = (3, -2, 1, 1),$
 $e_3' = e_3 - \frac{\langle e_3, e_1' \rangle}{\|e_1'\|^2} e_1' - \frac{\langle e_3, e_2' \rangle}{\|e_2'\|^2} e_2' = (1, 1, 0, 1) - \frac{2}{3}(0, 1, 1, 1) - \frac{2}{15}(3, -2, 1, 1) = \frac{1}{5}(3, 3, -4, 1),$
on prend alors $e_3' = (3, 3, -4, 1),$
 $e_4' = e_4 - \frac{\langle e_4, e_1' \rangle}{\|e_1'\|^2} e_1' - \frac{\langle e_4, e_2' \rangle}{\|e_2'\|^2} e_2' - \frac{\langle e_4, e_3' \rangle}{\|e_3'\|^2} e_3'$
 $= (1, 1, 1, 0) - \frac{2}{3}(0, 1, 1, 1) - \frac{2}{15}(3, -2, 1, 1) - \frac{2}{35}(3, 3, -4, 1)$
 $= \frac{3}{7}(1, 1, 1, -2),$
on prend alors $e_4' = (1, 1, 1, -2),$

- $e_1'' = \frac{e_1'}{\|e_1'\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(0, 1, 1, 1),$
 $e_2'' = \frac{e_2'}{\|e_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{15}}(3, -2, 1, 1),$
 $e_3'' = \frac{e_3'}{\|e_3'\|} = \frac{1}{\sqrt{35}}(3, 3, -4, 1),$
 $e_4'' = \frac{e_4'}{\|e_4'\|} = \frac{1}{\sqrt{7}}(1, 1, 1, -2).$

Exercice 11. Soit $u \in E$. Notons $u = u_F + u_{F^\perp}$ la décomposition de u selon F et $F^\perp$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u_{F^\perp} = \lambda u_0$, on a : $\langle u, u_0 \rangle = \lambda \|u_0\|^2$, donc $\lambda = \frac{\langle u, u_0 \rangle}{\|u_0\|^2}$. Donc :

$$p(u) = u_F = u - \lambda u_0 = u - \frac{\langle u, u_0 \rangle}{\|u_0\|^2} u_0,$$

et :

$$s(u) = u_F - u_{F^\perp} = u - 2 \frac{\langle u, u_0 \rangle}{\|u_0\|^2} u_0.$$

Exercice 12.

(a) On applique l'algorithme de Gram-Schmidt :

- $P_1 = 1,$
 $P_2 = X - \frac{\langle X, P_1 \rangle}{\|P_1\|^2} P_1 = X - \frac{1}{2},$
 $P_3 = X^2 - \frac{\langle X^2, P_1 \rangle}{\|P_1\|^2} P_1 - \frac{\langle X^2, P_2 \rangle}{\|P_2\|^2} P_2 = X^2 - \frac{1}{3} 1 - \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12}} \left(X - \frac{1}{2} \right) = X^2 - X + \frac{1}{6},$
- $Q_1 = \frac{P_1}{\|P_1\|} = 1,$
 $Q_2 = \frac{P_2}{\|P_2\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{12}}} \left(X - \frac{1}{2} \right) = \sqrt{12} \left(X - \frac{1}{2} \right),$

$$Q_3 = \frac{P_3}{\|P_3\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{180}}} \left(X^2 - X + \frac{1}{6} \right) = \sqrt{180} \left(X^2 - X + \frac{1}{6} \right).$$

(b) Soient $a, b \in \mathbb{R}$: $\int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt = \|X^2 - (aX + b)\|^2$. On cherche donc la distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$. Par construction, le nombre recherché est :

$$d(X^2, \mathbb{R}_1[X]) = \langle X^2, Q_3 \rangle = \frac{1}{\sqrt{180}}.$$

Exercice 13. Supposons p orthogonal. Soit $u \in E$, alors, d'après le théorème de Pythagore :

$$\|u\|^2 = \|p(u)\|^2 + \|u - p(u)\|^2 \geq \|p(u)\|^2,$$

donc $\|p(u)\| \leq \|u\|$.

Réciproquement, supposons que : $\forall u \in E, \|p(u)\| \leq \|u\|$. Notons F et G les sous-espaces caractéristiques de p , et soient $u \in F, v \in G$. Considérons $f : \lambda \mapsto \|u + \lambda v\|^2$. Par hypothèse :

$$f(0) = \|u\|^2 = \|p(u + \lambda v)\|^2 \leq f(\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

donc f admet un minimum en 0. Donc $f'(0) = 2\langle u, v \rangle = 0$. Donc F et G sont orthogonaux, donc p est orthogonal.

Exercice 14. On a déjà orthonormalisé la famille $(x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto x^2)$ (cf l'exercice 11). Notons $\left(h_1 : x \mapsto 1, h_2 : x \mapsto \sqrt{12} \left(x - \frac{1}{2} \right), h_3 : x \mapsto \sqrt{180} \left(x^2 - x + \frac{1}{6} \right) \right)$ son orthonormalisée. Alors, d'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} d(\exp, F)^2 &= \|\exp - p_F^\perp(\exp)\|^2 \\ &= \|\exp\|^2 - \langle \exp, h_1 \rangle^2 - \langle \exp, h_2 \rangle^2 - \langle \exp, h_3 \rangle^2 \\ &= \frac{1}{2}(e^2 - 1) - (e - 1)^2 - 3(3 - e)^2 - 5(7e - 19)^2 \\ &= -\frac{497}{2}e^2 + 1465e - \frac{3667}{2} \\ &\simeq 312,6 \end{aligned}$$

d'où $d(\exp, F) \simeq 17,7$.

Exercice 15. On a : $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \|M - aI_n - bU\| = d(M, F)$ où $F = \text{Vect}(I_n, U)$.

On orthonormalise la famille (I_n, U) :

- $A_1 = I_n,$
 $A_2 = U - \frac{\langle U, A_1 \rangle}{\|A_1\|^2} A_1 = U - \frac{n}{n} I_n = U - I_n,$
- $B_1 = \frac{A_1}{\|A_1\|} = \frac{1}{\sqrt{n}} I_n, B_2 = \frac{A_2}{\|A_2\|} = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} (U - I_n),$

puis, d'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} d(M, F)^2 &= \|M\|^2 - \langle M, B_1 \rangle^2 - \langle M, B_2 \rangle^2 \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} m_{ij}^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n m_{ii} \right)^2 - \frac{1}{n(n-1)} \left(\sum_{i \neq j} m_{ij} \right)^2. \end{aligned}$$