

Corrigé du cahier de vacances Mathématiques

I. Calculs

Exercice 1. Simplifier les fractions suivantes.

$$a = \frac{84}{30} \quad b = \frac{9 \times 5^{-2} \times 34}{2^5 \times 21} \quad c = \frac{9}{5} - \frac{5}{9} \quad d = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

$$a = \frac{2^2 \times 3 \times 7}{2 \times 3 \times 5} = \frac{14}{5} \quad b = \frac{3^2 \times 2 \times 17}{2^5 \times 3 \times 7 \times 5^2} = \frac{3 \times 17}{2^4 \times 5^2 \times 7} = \frac{51}{2800}$$

$$c = \frac{9^2 - 5^2}{9 \times 5} = \frac{(9-5)(9+5)}{45} = \frac{56}{45} \quad d = \frac{60 + 30 + 20 + 15 + 12}{60} = \frac{137}{60}$$

Exercice 2. Soit x, y, z trois réels. Simplifier les fractions suivantes, en supposant qu'elles sont bien définies.

$$a = \frac{1}{x-y} + \frac{1}{x+y} \quad b = \frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{yz} \quad c = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \quad d = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}$$

$$a = \frac{(x+y) + (x-y)}{(x-y)(x+y)} = \frac{2x}{x^2 - y^2} \quad b = \frac{x+y+z}{xyz}$$

$$c = \frac{xyz}{xy + xz + yz} \quad d = \frac{3x+2}{2x+1}$$

Exercice 3. Comparer (*i.e.*, dire quel est le plus grand) :

$$a = \frac{7}{6} \quad \text{et} \quad a' = \frac{6}{7} \quad b = \frac{4}{9} \quad \text{et} \quad b' = \frac{6}{13} \quad c = \frac{25}{49} \quad \text{et} \quad c' = \frac{51}{100}$$

$$d = \frac{x^2+1}{x+1} \quad \text{et} \quad d' = \frac{x^3+1}{x^2+1} \quad \text{avec } x \text{ réel positif.}$$

$$a > 1 \quad \text{et} \quad a' < 1 \quad \text{donc} \quad a > a'.$$

$$b - b' = \frac{4 \times 13 - 6 \times 9}{9 \times 13} = \frac{2(26 - 27)}{9 \times 13} = \frac{-2}{9 \times 13} < 0 \quad \text{donc} \quad b < b'.$$

$$c - c' = \frac{25 \times 100 - 51 \times 49}{49 \times 100} = \frac{50^2 - (50+1)(50-1)}{4900} = \frac{1}{4900} > 0 \quad \text{donc} \quad c > c'.$$

$$\begin{aligned}
 d - d' &= \frac{(x^2 + 1)^2 - (x^3 + 1)(x + 1)}{(x + 1)(x^2 + 1)} \\
 &= \frac{x^4 + 2x^2 + 1 - x^4 - x^3 - x - 1}{(x + 1)(x^2 + 1)} = \frac{-x(x^2 - 2x + 1)}{(x + 1)(x^2 + 1)} = \frac{-x(x - 1)^2}{(x + 1)(x^2 + 1)}
 \end{aligned}$$

Comme $x \geq 0$ alors $d - d' \leq 0$ donc $d \leq d'$.

On peut ajouter que l'égalité $d = d'$ a lieu si et seulement si $x = 0$ ou $x = 1$.

Exercice 4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a. $x^2 + x - 6 = 0$	b. $x^2 + 3x + 3 = 0$	c. $16x^2 - 8x + 1 = 0$
d. $x^2 + 4x - 7 = 0$	e. $x^2 - 36 = 0$	f. $3x^2 + 8x = 0$
g. $x^2 - \sqrt{13}x + 1 = 0$	h. $x^3 - 5x^2 + 14x = 0$	i. $5x^4 + 7x^2 + 2 = 0$

On note $\mathcal{S}_a$ l'ensemble des solutions de l'équation a, et ainsi de suite.

$$\mathcal{S}_a = \{2, -3\} \quad \mathcal{S}_b = \emptyset \quad \mathcal{S}_c = \left\{\frac{1}{4}\right\} \quad \mathcal{S}_d = \{-2 + \sqrt{11}, -2 - \sqrt{11}\}$$

$$\mathcal{S}_e = \{-6, 6\} \quad \text{car} \quad x^2 = 36 \iff x = \pm 6$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}_f &= \left\{0, -\frac{8}{3}\right\} \quad \text{car} \quad 3x^2 + 8x = 0 \iff x(3x + 8) = 0 \\
 &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad 3x + 8 = 0
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{S}_g = \left\{\frac{\sqrt{13}-3}{2}, \frac{\sqrt{13}+3}{2}\right\}$$

$$\mathcal{S}_h = \{0\} \quad \text{car} \quad x^3 - 5x^2 + 14x = 0 \iff x(x^2 - 5x + 14) = 0$$

$$\mathcal{S}_i = \emptyset \quad \text{car l'équation est équivalente à} \quad x^2 = -1 \quad \text{ou} \quad x^2 = -\frac{2}{5}.$$

Exercice 5. Résoudre les inéquations suivantes.

a. $x^2 + 6x - 16 < 0$	b. $4x^2 + 20x + 25 \leq 0$	c. $2x^2 + x + 1 \geq 0$
------------------------	-----------------------------	--------------------------

a. L'équation $x^2 + 6x - 16 = 0$ admet -8 et 2 pour solution donc $\mathcal{S}_a =]-8, 2[$.

b. L'équation $4x^2 + 20x + 25 = 0$ admet $-\frac{5}{2}$ pour unique solution donc $\mathcal{S}_b = \left\{-\frac{5}{2}\right\}$.

c. L'équation $2x^2 + x + 1 = 0$ n'admet pas de solution donc $\mathcal{S}_c = \mathbb{R}$.

Exercice 6. Résoudre les équations et le système suivants.

a. $3x^2 - 18x + 24 = 0$	b. $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2}$	c. $\begin{cases} x + y = \frac{74}{35} \\ xy = 1 \end{cases}$
--------------------------	--	--

a. L'équation équivaut à $x^2 - 6x + 8 = 0$ donc $\mathcal{S}_a = \{2, 4\}$.

b. L'équation équivaut à $x^2 - 3x - 4 = 0$ donc $\mathcal{S}_b = \{-1, 4\}$.

c. x et y sont les solutions de l'équation $X^2 - \frac{74}{35}X + 1 = 0$.

Le discriminant de celle-ci est :

$$\Delta = \left(\frac{74}{35}\right)^2 - 4 = \left(\frac{74}{35} - 2\right)\left(\frac{74}{35} + 2\right) = \frac{4}{35} \times \frac{144}{35} = \left(\frac{2 \times 12}{35}\right)^2$$

Les solutions sont $\frac{1}{2}\left(\frac{74}{35} \pm \frac{24}{35}\right) = \frac{37 \pm 12}{35}$, soit $\frac{7}{5}$ et $\frac{5}{7}$.

L'ensemble des solutions du système est $\mathcal{S}_c = \left\{\left(\frac{5}{7}, \frac{7}{5}\right), \left(\frac{7}{5}, \frac{5}{7}\right)\right\}$.

C'est-à-dire $x = \frac{5}{7}$ et $y = \frac{7}{5}$ ou l'inverse.

Exercice 7. Résoudre les équations :

a. $x^2 + 472x - 473 = 0$

b. $5x^2 + 23x + 26 = 0$

Pour ceci deviner une solution évidente, puis utiliser la somme et le produit.

- a. 1 est solution évidente de l'équation, le produit des deux solutions est -473 , donc l'autre solution est -473 , et $\mathcal{S}_a = \{1, -473\}$
- b. -2 est solution évidente de l'équation, le produit des deux solutions est $-\frac{26}{5}$, donc l'autre solution est $-\frac{13}{5}$, et $\mathcal{S}_b = \{-2, -\frac{13}{5}\}$

Exercice 8. Calculer :

$$a = 107^2 - 93^2 \quad b = \frac{101}{99} - \frac{99}{101} \quad c = 19^2 + 11^2 + 22 \times 19 \quad d = \frac{\frac{71}{70} - \frac{1}{141}}{1 + \frac{71}{70 \times 141}}$$

$$a = (107 - 93)(107 + 93) = 14 \times 200 = 2800$$

$$b = \frac{101^2 - 99^2}{99 \times 101} = \frac{(101 - 99)(101 + 99)}{9999} = \frac{400}{9999}$$

$$c = 19^2 + 2 \times 19 \times 11 + 11^2 = (19 + 11)^2 = 900$$

$$d = \frac{71 \times 141 - 70}{70 \times 141 - 71} = \frac{70 \times 141 + 141 - 70}{70 \times 141 - 71} = 1$$

Exercice 9. Résoudre les équations suivantes.

a. $9x^2 + 6x + 1 = 0$

b. $29x^2 + 29x - x - 1 = 0$

c. $(9x + 7)^2 = (8x + 8)^2$

d. $(5x + 8)^2 = (5x + 8)(2x - 7)$

e. $25x^2 + (5x + 2)(4x + 3) - 4 = 0$

a. $9x^2 + 6x + 1 = 0 \iff (3x + 1)^2 = 0$

donc $\mathcal{S}_a = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$

b. $29x^2 + 29x - x - 1 = 0 \iff (29x - 1)(x + 1) = 0$

donc $\mathcal{S}_b = \left\{-1, \frac{1}{29}\right\}$

c. $(9x + 7)^2 = (8x + 8)^2 \iff (9x + 7)^2 - (8x + 8)^2 = 0$

$\iff (x - 1)(17x + 15) = 0$

donc $\mathcal{S}_c = \left\{1, -\frac{15}{17}\right\}$

$$\begin{aligned} \text{d. } (5x+8)^2 &= (5x+8)(2x-7) \iff (5x+8)^2 - (5x+8)(2x-7) = 0 \\ &\iff (5x+8)(3x+15) = 0 \quad \text{donc} \quad \mathcal{S}_d = \left\{-\frac{8}{5}, -5\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e. } 25x^2 + (5x+2)(4x+3) - 4 &= (5x+2)(5x-2) + (5x+2)(4x+3) \\ &= (5x+2)(9x+1) \quad \text{donc} \quad \mathcal{S}_e = \left\{-\frac{2}{5}, -\frac{1}{9}\right\} \end{aligned}$$

Exercice 10. Développer les expressions suivantes.

$$\begin{aligned} a &= (x-2)^2(x+2)^2 & b &= (x+1)^3 & c &= (x^2+x+1)^2 & d &= (x-1)^4 \\ e &= (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1) & f &= (x+\sqrt{2x}+1)(x-\sqrt{2x}+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= (x^2-4)^2 = x^4 - 8x^2 + 16 & b &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\ c &= x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 & d &= x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 \\ e &= x^8 - 1 & f &= (x+1)^2 - (\sqrt{2x})^2 = x^2 + 1 \end{aligned}$$

Exercice 11. Simplifier les réels suivants.

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{20} & b &= 3\sqrt{2} - \sqrt{8} & c &= (2\sqrt{7})^2 & d &= (2+\sqrt{3})^2 & e &= \left(\sqrt{3\sqrt{2}}\right)^4 \\ f &= \sqrt{(\sqrt{5}-3)^2} & g &= \left(\frac{5-\sqrt{3}}{\sqrt{10}}\right)^2 & h &= (\sqrt{6}-\sqrt{2})^2 - (\sqrt{6}+\sqrt{2})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= 2\sqrt{5} & b &= \sqrt{2} & c &= 28 & d &= 7+4\sqrt{3} & e &= 18 \\ f &= \left|\sqrt{5}-3\right| = 3-\sqrt{5} & g &= \frac{14}{5} - \sqrt{3} & h &= -8\sqrt{3} \end{aligned}$$

Exercice 12. Simplifier les fractions suivantes.

$$a = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \quad b = \frac{1}{\sqrt{18}-\sqrt{12}} \quad c = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-\sqrt{5}} \quad d = \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}-1}\right)^2$$

$$a = 2 + \sqrt{3} \quad b = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} \quad c = \frac{1+\sqrt{10}}{3} \quad d = \frac{3(7+2\sqrt{6})}{25}$$

Exercice 13. Simplifier les réels suivants.

$$a = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1} \qquad b = \sqrt{x - 2\sqrt{x} + 1} \times \sqrt{x + 2\sqrt{x} + 1} \quad \text{où } x \geq 0.$$

$$a = \frac{\sqrt{3} + 1 + \sqrt{2}}{(\sqrt{3} + 1)^2 - 2} = \frac{2 + \sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1)$$

$$b = \sqrt{(x+1)^2 - (2\sqrt{x})^2} = \sqrt{x^2 + 1 - 2x} = |x - 1|$$

Exercice 14. Résoudre les équations suivantes.

$$\text{a. } |2x - 1| = 5 \qquad \text{b. } |4 - 3x| = -2 \qquad \text{c. } |x + 1| = |2x - 4| \qquad \text{d. } (x + 5)^2 = |x + 5|$$

$$\begin{aligned} \text{a. } |2x - 1| = 5 &\iff (2x - 1)^2 = 25 \\ &\iff 4x^2 - 4x - 24 = 0 \\ &\iff x^2 - x - 6 = 0 \qquad \mathcal{S}_a = \{-2, 3\} \end{aligned}$$

$$\text{b. } |4 - 3x| \geq 0 \quad \text{et} \quad -2 < 0 \qquad \text{donc} \quad \mathcal{S}_b = \emptyset$$

$$\begin{aligned} \text{c. } |x + 1| = |2x - 4| &\iff (x + 1)^2 = (2x - 4)^2 \\ &\iff (x + 1)^2 - (2x - 4)^2 = 0 \\ &\iff (-x + 5)(3x - 3) = 0 \qquad \mathcal{S}_c = \{1, 5\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d. } (x + 5)^2 = |x + 5| &\iff (x + 5)^4 = (x + 5)^2 \\ &\iff (x + 5)^2((x + 5)^2 - 1) = 0 \\ &\iff (x + 5)^2(x + 4)(x + 6) = 0 \qquad \mathcal{S}_d = \{-6, -5, -4\} \end{aligned}$$

Exercice 15. Résoudre les inéquations suivantes.

$$\text{a. } |x| \leq 4 \qquad \text{b. } |2x + 3| \leq 3 \qquad \text{c. } |x + 1| \geq 2 \qquad \text{d. } |1 - x| \leq |2 - x|$$

$$\mathcal{S}_a = [-4, 4] \qquad \mathcal{S}_b = [-3, 0] \qquad \mathcal{S}_c =]-\infty, -3] \cup [1, +\infty[$$

$$\mathcal{S}_d =]-\infty, \frac{3}{2}] \quad \text{car} \quad |1 - x| \leq |2 - x| \iff (1 - x)^2 \leq (2 - x)^2 \iff x \leq \frac{3}{2}$$

II. Notions de base

Exercice 16. Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Placer sur le cercle trigonométrique les angles x , $-x$, $\pi - x$ et $\pi + x$.

Compléter les formules :

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

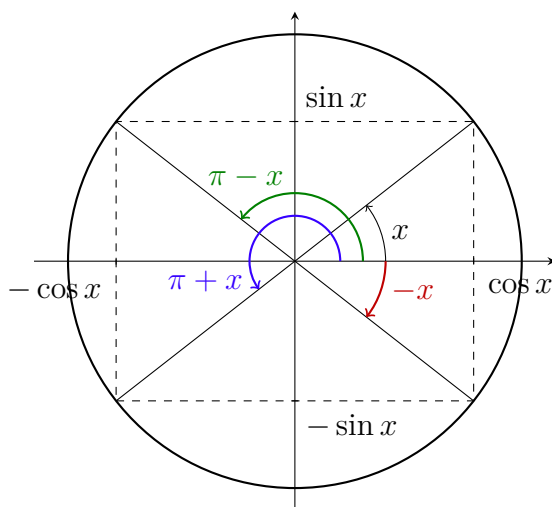
$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$

Ceci d'après la figure :



Exercice 17. Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Placer sur le cercle trigonométrique les angles x , $\frac{\pi}{2} - x$ et $\frac{\pi}{2} + x$.

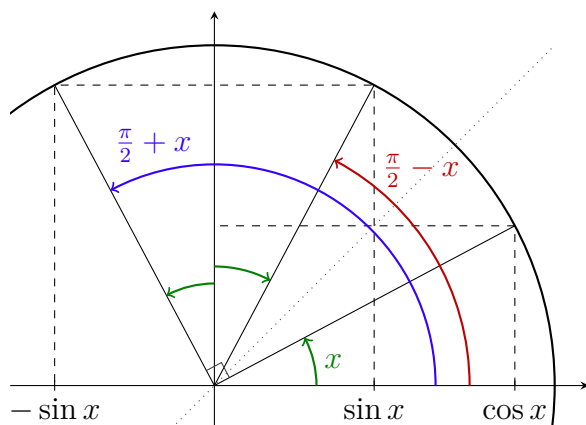
Compléter les formules :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$



Les formules pour $\frac{\pi}{2} - x$ s'obtiennent par symétrie par rapport à la première bissectrice.

Celles pour $\frac{\pi}{2} + x$ s'obtiennent par rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 18. Compléter les formules :

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

Pour les deux premières on écrit les formules de sommes $\cos(x + y)$ et $\sin(x + y)$ en remplaçant y par $(-y)$, puis on utilise $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$.

$$\begin{aligned} \text{Par exemple :} \quad \cos(x - y) &= \cos(x + (-y)) \\ &= \cos x \cos(-y) - \sin x \sin(-y) \\ &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \end{aligned}$$

Pour les autres on écrit les formules de sommes en remplaçant y par x .

$$\begin{aligned} \text{Par exemple :} \quad \cos(2x) &= \cos(x + x) \\ &= \cos x \cos x - \sin x \sin x \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x \end{aligned}$$

Pour les deux expressions supplémentaires de $\cos(2x)$ on utilise $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ et $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.

$$\begin{aligned} \text{Par exemple :} \quad \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) \\ &= 2 \cos^2 x - 1 \end{aligned}$$

Exercice 19.

Compléter :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

Exercice 20. Calculer :

$$\begin{aligned} \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{1}{2} & \sin\frac{3\pi}{4} &= \frac{\sqrt{2}}{2} & \cos\frac{7\pi}{6} &= -\frac{\sqrt{3}}{2} & \sin\frac{11\pi}{6} &= -\frac{1}{2} & \sin\frac{5\pi}{2} &= 1 \\ \cos\left(-\frac{17\pi}{3}\right) &= \frac{1}{2} & \sin 3\pi &= 0 & \cos\frac{-5\pi}{4} &= -\frac{\sqrt{2}}{2} & \sin\frac{22\pi}{3} &= -\frac{\sqrt{3}}{2} & \cos 9\pi &= -1 \\ \cos\left(-\frac{23\pi}{6}\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2} & \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) &= -\sqrt{3} & \tan\frac{2\pi}{3} &= -\sqrt{3} & \tan\frac{3\pi}{4} &= -1 & \tan\left(-\frac{11\pi}{4}\right) &= 1 \end{aligned}$$

Tout se lit sur le cercle trigonométrique.

On peut aussi utiliser le fait que les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont 2π -périodiques.

Exercice 21. Donner un réel x vérifiant :

a. $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b. $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c. $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

d. $\begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

e. $\begin{cases} \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

f. $\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = -1 \end{cases}$

a. $x = \frac{5\pi}{6}$

b. $x = -\frac{\pi}{4}$

c. $x = -\frac{\pi}{6}$

d. $x = -\frac{\pi}{3}$

e. $x = \frac{7\pi}{6}$ (ou $-\frac{5\pi}{6} \dots$)

f. $x = -\frac{\pi}{2}$ (ou $\frac{3\pi}{2} \dots$)

Exercice 22. Résoudre les équations suivantes.

a. $\sin x = 0$

b. $\cos x = 0$

c. $\cos x = -1$

d. $\cos x = \frac{1}{2}$

e. $\sin x = \frac{1}{2}$

f. $\tan x = 1$

g. $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

h. $\sin^2 x + \sqrt{3}\cos x = \frac{7}{4}$

i. $(\cos x + \sin x)^2 = 1$

$\mathcal{S}_a = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$\mathcal{S}_b = \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$\mathcal{S}_c = \{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$\mathcal{S}_d = \{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$\mathcal{S}_e = \{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$\mathcal{S}_f = \{\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

g. Les solutions de l'équation $2X^2 + X - 1 = 0$ sont $X_1 = -1$ et $X_2 = \frac{1}{2}$.

Donc $\mathcal{S}_g = \{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$= \{\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ plus simplement.

h. $\sin^2 x + \sqrt{3}\cos x = \frac{7}{4} \iff 1 - \cos^2 x + \sqrt{3}\cos x = \frac{7}{4}$

$\iff \cos^2 - \sqrt{3}\cos x + \frac{3}{4} = 0$

L'équation $X^2 - \sqrt{3}X + \frac{3}{4} = 0$ admet $X_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ pour unique solution.

Donc $\mathcal{S}_h = \{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

i. Par équivalences :

$(\cos x + \sin x)^2 = 1 \iff \cos^2 x + 2\cos x \sin x + \sin^2 x = 1$

$\iff \sin(2x) = 0 \iff 2x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Donc $\mathcal{S}_i = \{k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 23.

- En utilisant $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{4}$, calculer le cosinus, le sinus et la tangente de $\frac{\pi}{12}$.
- En utilisant $\frac{\pi}{6} = 2\frac{\pi}{12}$ calculer de nouveau le cosinus, le sinus et la tangente de $\frac{\pi}{12}$.
- Démontrer que vous avez obtenu les mêmes valeurs.

- a. Comme $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$ alors les formules de sommes donnent :

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Par quotient :

$$\tan \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = 2 - \sqrt{3}$$

- b. Pour $x = \frac{\pi}{12}$ la formule $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$ donne $\cos^2 \frac{\pi}{12} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

On en déduit $\sin^2 \frac{\pi}{12} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$.

Comme $\frac{\pi}{12} \in [0, \frac{\pi}{2}]$, *i.e.*, $\frac{\pi}{12}$ est dans le premier quadrant du cercle trigonométrique, alors ses cosinus et sinus sont positifs, donc :

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

Par quotient :

$$\tan \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{7-4\sqrt{3}}$$

- c. On constate que :

$$\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \right)^2 = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} = \left(\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} \right)^2$$

Les nombres $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ et $\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$ sont positifs et ont le même carré, donc ils sont égaux.

De même $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$, et $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$.

Exercice 24. Calculer les limites suivantes.

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 2x} \quad \text{b. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} \quad \text{c. } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{1 + \cos x} \quad \text{d. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x + \tan 9x}{\tan 3x + \tan 7x}$$

a. Comme $\frac{\sin x}{\sin 2x} = \frac{\sin x}{2 \sin x \cos x} = \frac{1}{2 \cos x}$ alors $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cos x} = \frac{1}{2}$.

b. Comme $\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$

alors $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 0$.

c. Comme $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{\sin x(1 - \cos x)}{1 - \cos^2 x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$

alors $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \pm\infty$.

En fait cette limite n'existe pas, puisqu'elle est différente selon que x tende vers π par valeurs inférieures ou supérieures. La réponse correcte est :

$$\lim_{x \nearrow \pi} \frac{\sin x}{1 + \cos x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \searrow \pi} \frac{\sin x}{1 + \cos x} = -\infty$$

d. Grâce aux formules de sommes :

$$\begin{aligned} \frac{\tan x + \tan 9x}{\tan 3x + \tan 7x} &= \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin 9x}{\cos 9x}}{\frac{\sin 3x}{\cos 3x} + \frac{\sin 7x}{\cos 7x}} = \frac{\sin x \cos 9x + \sin 9x \cos x}{\sin 3x \cos 7x + \sin 3x \cos 7x} \times \frac{\cos 3x \cos 7x}{\cos x \cos 9x} \\ &= \frac{\sin 10x}{\sin 10x} \times \frac{\cos 3x \cos 7x}{\cos x \cos 9x} = \frac{\cos 3x \cos 7x}{\cos x \cos 9x} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x + \tan 9x}{\tan x + \tan 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x \cos 7x}{\cos x \cos 9x} = 1.$$

Exercice 25. Calculer les nombres complexes suivants.

$$a = (3 + i)(-2 + 3i) \quad b = (1 - i)^2 \quad c = \frac{2 + i}{3 + i} \quad d = \frac{(3 + 4i)(4 + 3i)}{5 + 5i}$$

$$a = -9 + 7i \quad b = -2i \quad c = \frac{7}{10} + \frac{1}{10}i \quad d = \frac{5}{2} + \frac{5}{2}i$$

Exercice 26. Donner la forme algébrique des complexes suivants.

$$a = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \quad b = 3e^{i3\pi} \quad c = \sqrt{18}e^{i\frac{5\pi}{4}} \quad d = e^{-i\frac{\pi}{2}} \quad e = \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$a = \sqrt{3} + i \quad b = -3 \quad c = -3 - 3i \quad d = -i \quad e = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$$

Exercice 27. Donner une forme exponentielle des complexes suivants.

$$a = 3i \quad b = 1 + i\sqrt{3} \quad c = 2 - 2i \quad d = -4 \quad e = -3 - 3i\sqrt{3}$$

$$a = 3e^{i\frac{\pi}{2}} \quad b = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \quad c = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad d = 4e^{i\pi} \quad e = 6e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

Exercice 28. Déterminer tous les nombres complexes z tels que :

a. $z^2 = 4$ b. $z^2 = 3 + 4i$ c. $z^2 = -5 - 12i$ d. $z^2 = i$ e. $z^2 = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

a. $z = 2$ ou $z = -2$.

b. En posant $z = x + iy$ on montre que : $z = 2 + i$ ou $z = -2 - i$.

c. De même : $z = 2 - 3i$ ou $z = -2 + 3i$.

d. On peut procéder de même ou utiliser $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

On obtient $z = \pm e^{i\frac{\pi}{4}}$ soit $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ ou $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

e. On obtient $z = \pm e^{-i\frac{\pi}{6}}$ soit $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ ou $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

Exercice 29.

a. Déterminer si les suites suivantes sont arithmétiques ou géométriques, ou ni l'un ni l'autre.

1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 7 - 3n$

2. $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 3$

3. $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (n+1)(n+2)$

4. $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{4}{3^n}$

5. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = u_{n-1} + 2n$

b. Donner la somme des termes de u_0 à u_n pour chacune de ces suites.

On pourra utiliser la formule : $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

a. 1. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison -3 .

2. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante, donc arithmétique de raison 0 et géométrique de raison 1.

3. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est ni arithmétique ni géométrique. Pour démontrer ceci on calcule $u_0 = 2$, $u_1 = 6$, $u_2 = 12$, puis on vérifie que :

$$u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1 \quad \text{et} \quad \frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}.$$

4. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

5. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est ni arithmétique ni géométrique.

b. On obtient :

1. $\sum_{k=0}^n u_k = \frac{1}{2}(n+1)(14 - 3n)$

2. $\sum_{k=0}^n u_k = 3(n+1)$

3. $\sum_{k=0}^n u_k = \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)$

4. $\sum_{k=0}^n u_k = 6 - \frac{2}{3^n}$

5. On remarque que $u_n = 1 + 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = 1 + 2 \sum_{k=0}^n k = n^2 + n + 1$.

On peut démontrer ce résultat par récurrence.

On en déduit : $\sum_{k=0}^n u_k = \frac{1}{3}(n+1)(n^2 + 2n + 3)$

Exercice 30. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 3u_n + 4$.

- Déterminer un réel γ tel que : $\gamma = 3\gamma + 4$.
- Démontrer que la suite $(u_n - \gamma)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique.
- En déduire le terme général de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Calculer $u_0 + u_1 + \dots + u_n$ en fonction de n . Vérifier pour $n = 0, 1$, et 2 .

a. On calcule $\gamma = -2$.

b. Par soustraction des égalités $u_{n+1} = 3u_n + 4$ et $\gamma = 3\gamma + 4$ on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (u_{n+1} - \gamma) = 3(u_n - \gamma).$$

Ceci montre que la suite $(u_n - \gamma)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison 3.

c. On obtient : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 4 \times 3^n - 2$.

d. On obtient : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^n u_k = 6 \times 3^n - 2n - 4$.

On calcule $u_0 = 2$, $u_1 = 10$, $u_2 = 34$, puis $u_0 + u_1 = 12$ et $u_0 + u_1 + u_2 = 46$, ce qui permet de vérifier la formule pour $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$.

Exercice 31.

Calculer les limites suivantes.

$$\text{a. } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^n - 1}{2^n} \quad \text{b. } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}{n} \quad \text{c. } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+4} - \sqrt{n+1})$$

a. Comme $\frac{4^n - 1}{2^n} = 2^n - \frac{1}{2^n}$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^n - 1}{2^n} = +\infty$.

b. Comme $\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}{n} = \frac{\sqrt{n+1}}{n} + \frac{\sqrt{n-1}}{n} = \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}$
alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}{n} = 0$.

c. On multiplie par la quantité conjuguée.

$$\begin{aligned} \sqrt{n}(\sqrt{n+4} - \sqrt{n+1}) &= \sqrt{n} \frac{(n+4) - (n+1)}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n+1}} \\ &= \frac{3\sqrt{n}}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n+1}} = \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{4}{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \end{aligned}$$

Ceci montre que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+4} - \sqrt{n+1}) = \frac{3}{2}$.

Exercice 32. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$$

- Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie, positive et majorée par 2.
- Démontrer qu'elle est croissante.
- Démontrer qu'elle converge et déterminer sa limite.
- Tracer la courbe de la fonction f définie par : $\forall x \in [-2, +\infty[\quad f(x) = \sqrt{x+2}$
Représenter sur le graphe les premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- a. Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété : u_n est bien défini et $0 \leq u_n \leq 2$.

On démontre par récurrence que cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. Comme $u_0 = 0$ alors $0 \leq u_0 \leq 2$: la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité. Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie : u_n est bien défini et $0 \leq u_n \leq 2$.

Alors $2 \leq u_n + 2 \leq 4$ donc $\sqrt{u_n + 2}$ est bien défini et $\sqrt{2} \leq \sqrt{u_n + 2} \leq 2$.

Ceci montre que u_{n+1} est bien défini et $0 \leq u_{n+1} \leq 2$: la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

On a démontré que la propriété $\mathcal{P}_n$ implique la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$.

Conclusion. Par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ceci signifie que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie, positive et majorée par 2.

- b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n + 2} - u_n = \frac{u_n + 2 - u_n^2}{\sqrt{u_n + 2} + u_n} = -\frac{u_n^2 - u_n - 2}{\sqrt{u_n + 2} + u_n}.$$

Les racines du polynôme $X^2 - X - 2$ sont $x_1 = 2$ et $x_2 = -1$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n - 2)(u_n + 1)}{\sqrt{u_n + 2} + u_n}.$$

Comme $0 \leq u_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n \geq 0.$$

Ceci montre que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

- c. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée.

Elle est donc convergente, d'après le théorème de la limite monotone.

Soit ℓ sa limite.

Alors la suite $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ et la suite $(\sqrt{u_n + 2})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{\ell + 2}$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$ alors $\ell = \sqrt{\ell + 2}$.

On en déduit $\ell^2 - \ell - 2 = 0$, soit $\ell = -1$ ou $\ell = 2$.

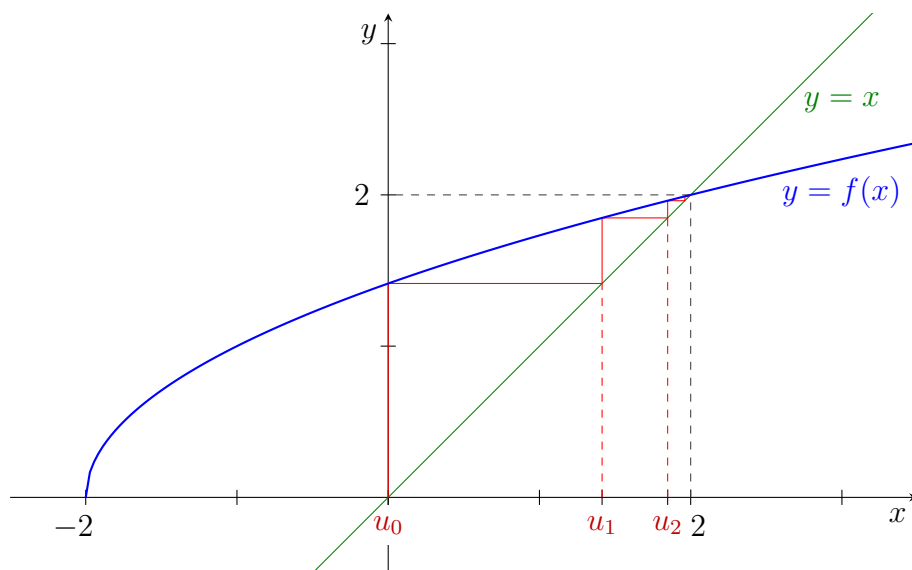
Comme la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive alors sa limite vérifie $\ell \geqslant 0$, donc $\ell = 2$.

On a démontré que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 2.

- d. Le graphe de la fonction f est le graphe de la fonction racine carrée décalé de deux unités vers la gauche.

On remarque que $f(2) = 2$.

On ajoute la première bissectrice, ce qui permet de représenter les premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et de comprendre qu'elle converge vers 2.



Exercice 33. Simplifier les expressions suivantes.

$$a = \ln \frac{25}{6} - \ln \frac{10}{3} \quad b = e^{2 \ln 2} \quad c = e^{-2 \ln 3 + \ln 6} \quad d = e^{1-2x} (e^x)^2 \quad f = \ln(xy) - \ln \frac{x}{y}$$

$$a = \ln \frac{5}{4} \quad b = 4 \quad c = \frac{2}{3} \quad d = e \quad f = 2 \ln y$$

Exercice 34. Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

a. $f(x) = x^2 + 5x - 6$

b. $f(x) = \frac{2x^3+5}{3x^3+2}$

c. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

d. $f(x) = 3e^{2x+1}$

e. $f(x) = x \cos(2x)$

f. $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$

g. $f(x) = \sqrt{2x^2+5}$

h. $f(x) = \tan x$

i. $f(x) = x^2 \sqrt{x}$

j. $f(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{x}$

k. $f(x) = e^x \sin x$

l. $f(x) = -\ln(\cos x)$

m. $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

n. $f(x) = \ln(2x^2)$

o. $f(x) = 2 \sin x \cos x$

On pourra vérifier les deux dernières en les calculant d'une autre façon.

- a. $f'(x) = 2x + 5$ b. $f'(x) = \frac{-27x^2}{(3x^3+2)^2}$ c. $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$
d. $f'(x) = 6e^{2x+1}$ e. $f'(x) = \cos(2x) - 2x \sin(2x)$ f. $f'(x) = \frac{-1}{e^x+1}$
g. $f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+5}}$ h. $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ i. $f'(x) = \frac{5}{2}x\sqrt{x}$
j. $f'(x) = -\frac{1+x^2}{x^2}e^{-x^2/2}$ k. $f'(x) = e^x(\sin x + \cos x)$ l. $f'(x) = \tan x$
m. $f'(x) = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$ n. $f'(x) = \frac{2}{x}$ o. $f'(x) = 2 \cos(2x)$

Pour la n on peut utiliser la formule $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, qui donne $f'(x) = \frac{4x}{2x^2} = \frac{2}{x}$.

On peut aussi écrire $f(x) = \ln 2 + 2 \ln x$, donc $f'(x) = \frac{2}{x}$.

Pour la o on peut utiliser la formule $(uv)' = u'v + uv'$, qui donne $f'(x) = 2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x$, mais on peut aussi remarquer que $f(x) = \sin(2x)$.

Dans les deux cas on aboutit à $f'(x) = 2 \cos(2x)$.

Exercice 35. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x$

- a. Étudier la parité de f (*i.e.*, déterminer si f est paire, impaire, ou ni l'un ni l'autre).
Éventuellement, réduire son ensemble de définition
b. Déterminer la dérivée de f puis dresser son tableau de variations.
c. Déterminer les limites de f .
d. Tracer l'allure de la courbe de f . Représenter au préalable ses tangentes aux points où elle coupe l'axe des abscisses, et où sa dérivée s'annule.

- a. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0 et elle vérifie : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = -f(x)$.

Elle est donc impaire. On restreint alors son étude à l'intervalle $\mathbb{R}_+$, on obtiendra le reste de la courbe par symétrie centrale de centre l'origine du repère.

- b. On obtient : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 3x^2 - 1$.

Cette dérivée est négative si et seulement si $x \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

Le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+$ est :

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	-1	0	+
$f(x)$	0	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$+\infty$

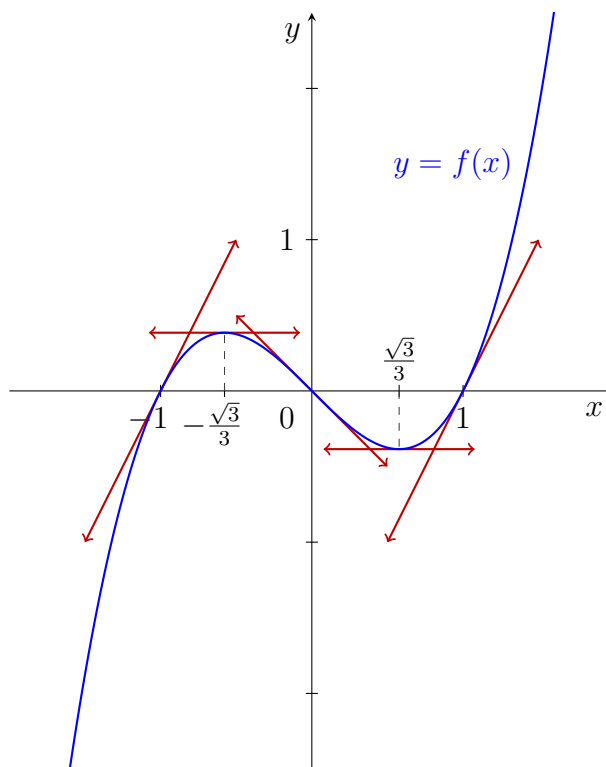
c. Comme $f(x) = x(x^2 - 1)$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Par parité on en déduit : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

d. La courbe de f coupe l'axe des abscisses en $x = -1$, $x = 0$ et $x = 1$.

On calcule $f'(1) = f'(-1) = 2$ et $f'(0) = -1$.

On obtient un graphe comme celui ci-dessous.



Exercice 36. Reproduire l'exercice précédent avec $f(x) = \frac{2x}{x+1}$.

Commencer par déterminer son ensemble de définition.

Tracer ses tangentes aux points d'abscisses 0 et -2 , ainsi que ses asymptotes.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

(Cet ensemble n'est pas symétrique par rapport à 0 donc f n'est ni paire ni impaire.)

Sa dérivée est : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$.

Elle est strictement positive, donc f est strictement croissante sur tout intervalle, c'est-à-dire sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, +\infty[$.

On calcule :

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty.$$

Ceci montre que la courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$.

Pour les limites en $\pm\infty$ on écrit :

$$f(x) = \frac{2}{1 + \frac{1}{x}}$$

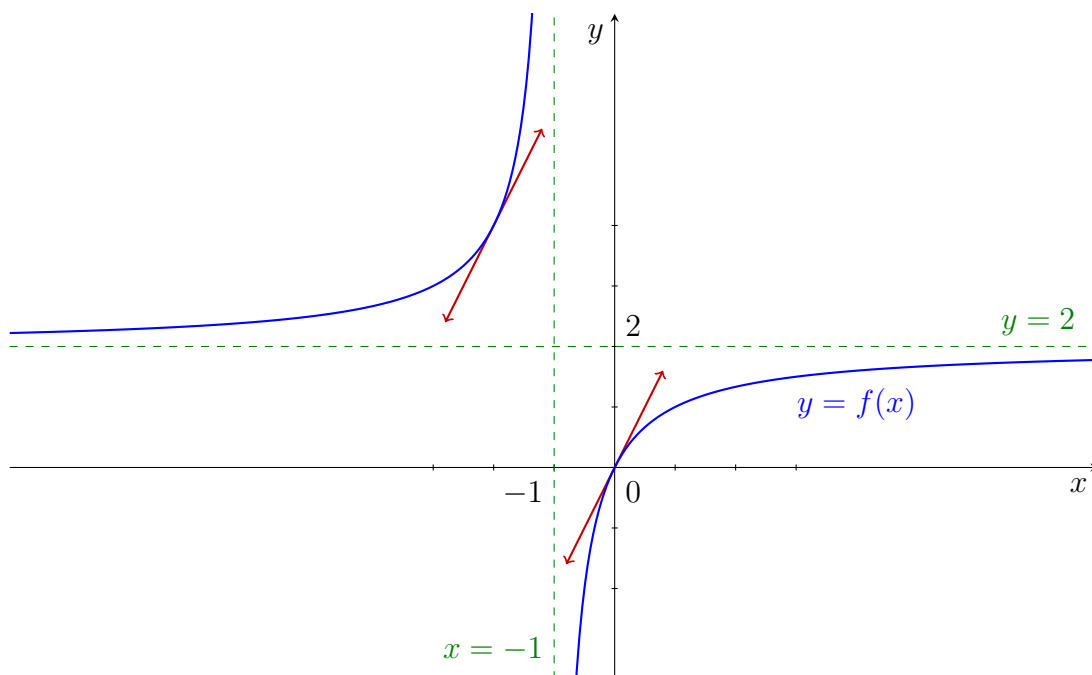
Ceci montre que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2.$$

On en déduit que la courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$.

On calcule $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$, $f(-2) = 4$, $f'(-2) = 2$. On peut ajouter $f(1) = 1$ et $f'(1) = \frac{1}{2}$.

On obtient une courbe comme :



Exercice 37. On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x} \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

- Justifier que les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$.
 - Démontrer qu'elles sont impaires.
 - Calculer $g \circ f(x)$ et $f \circ g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. (*i.e.*, $f(g(x))$ et $g(f(x))$)
 - Calculer et simplifier les dérivées de f et g .
- a. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $f(x)$ est défini si et seulement si $2e^x \neq 0$, ce qui est le cas car l'exponentielle est strictement positive.
- Donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction g est définie en x si et seulement si :

- $x^2 + 1 \geq 0$
- $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$.

La première condition est vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$ car un carré est toujours positif.

Pour la seconde condition on sépare le cas où x est positif de celui où x est négatif.

Si x est positif le résultat est évident : $x \geq 0$ donc $x^2 + 1 \geq 1$ puis $x + \sqrt{x^2 + 1} \geq 1$ et enfin $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$.

Si maintenant x est négatif, alors on remarque que $x^2 + 1 > x^2$, donc $\sqrt{x^2 + 1} \geq \sqrt{x^2} = |x|$. Comme $x \leq 0$ alors $|x| = -x$, donc $x + \sqrt{x^2 + 1} > x + |x| = x - x = 0$, et $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$.

Finalement dans tous les cas $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$ et donc la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$.

b. Les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0.

Pour la fonction f :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = \frac{e^{-2x} - 1}{2e^{-x}} = \frac{e^{-2x} - 1}{2e^{-x}} \times \frac{e^{2x}}{e^{2x}} = \frac{1 - e^{2x}}{2e^x} = -f(x).$$

Donc f est impaire.

Pour la fonction g on calcule $g(x) + g(-x)$:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) + g(-x) &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ &= \ln((\sqrt{x^2 + 1} + x)(\sqrt{x^2 + 1} - x)) \\ &= \ln(x^2 + 1 - x^2) = \ln 1 = 0. \end{aligned}$$

Ceci donne :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(-x) = -g(x)$$

La fonction g est donc impaire.

c. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$e^{g(x)} = x + \sqrt{x^2 + 1} \quad \text{et} \quad e^{2g(x)} = (x + \sqrt{x^2 + 1})^2 = 2x^2 + 1 + 2x\sqrt{x^2 + 1}$$

On en déduit :

$$f(g(x)) = \frac{2x^2 + 2x\sqrt{x^2 + 1}}{2\sqrt{x^2 + 1} + 2x} = x.$$

Ensuite :

$$f(x)^2 + 1 = \frac{e^{4x} - 2e^{2x} + 1}{4e^{2x}} + 1 = \frac{e^{4x} + 2e^{2x} + 1}{4e^{2x}} = \frac{(e^{2x} + 1)^2}{4e^{2x}} = \left(\frac{e^{2x} + 1}{2e^x}\right)^2.$$

Comme $\frac{e^{2x} + 1}{2e^x} \geq 0$ alors :

$$\sqrt{f(x)^2 + 1} = \left| \frac{e^{2x} + 1}{2e^x} \right| = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x}.$$

Ceci donne :

$$f(x) + \sqrt{f(x)^2 + 1} = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x} + \frac{e^{2x} + 1}{2e^x} = \frac{2e^{2x}}{2e^x} = e^x.$$

Enfin :

$$g(f(x)) = \ln \left(f(x) + \sqrt{f(x)^2 + 1} \right) = x.$$

Finalement on a obtenu :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f \circ g(x) = x \quad \text{et} \quad g \circ f(x) = x.$$

d. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}(2e^x) - (e^{2x} - 1)2e^x}{4e^{2x}} = \frac{2e^{3x} + 2e^x}{4e^{2x}} = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x}$$

Puis :

$$g'(x) = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Finalement on a obtenu :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x} \quad \text{et} \quad g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Exercice 38. Liste des fonctions :

$$f_1(x) = 1 - x \quad f_2(x) = 2x \quad f_3(x) = x^2 \quad f_4(x) = x^3 \quad f_5(x) = \sqrt{x}$$

$$f_6(x) = \frac{1}{x} \quad f_7(x) = (x+1)(3-x) \quad f_8(x) = x(x-1)(x-2)(x-3) \quad f_9(x) = |x|$$

$$f_{10}(x) = \sqrt{1-x^2} \quad f_{11}(x) = e^x \quad f_{12}(x) = \ln x \quad f_{13}(x) = \cos x \quad f_{14}(x) = \sin x$$

On remarque que :

- La fonction f_7 est une parabole orientée vers le bas, coupant l'axe des abscisses aux points d'abscisses -1 et 3 .
- La fonction f_8 est une courbe du quatrième degré, coupant l'axe des abscisses aux points d'abscisses 0 , 1 , 2 et 3 .

On peut démontrer que la courbe de la fonction f_{10} est un demi-cercle.

