

## Corrigé du DS de bienvenue ( 2h).

La rédaction, l'argumentation et la présentation matérielle entrent dans une part significative de la notation; vous devrez aussi respecter la terminologie et les règles d'usage en vigueur. Les exercices, problèmes sont indépendants. Les résultats numériques seront encadrés et simplifiés. Si vous êtes amené à repérer ce qui peut vous sembler une erreur d'énoncé, vous êtes prié de le signaler sur votre copie et devrez poursuivre votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous prendriez.

Calculatrices autorisées.

### Exercice 1 (Analyse)

On se donne  $u_0 \in ]0, 1[$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = u_n - u_n^2$ .

- 1) Etablir que  $u_n \in ]0, 1[$ , ce pour tout  $n$ .
- 2) Vérifier que la suite  $(u_n)$  décroît puis qu'elle converge.
- 3) Déterminer sa limite.

On pose, pour tout  $n$ ,  $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$ .

- 4) Prouver que la suite  $(v_n)$  est bien définie et qu'elle converge vers 1.
- 5) En appliquant le lemme de Cesaro à la suite  $(v_n)$  donner un équivalent de  $u_n$ .

### Solution :

- 1) Simple récurrence.
- 2) Pour tout entier naturel  $n$  :  $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 < 0$ . Ainsi la suite  $(u_n)$  décroît strictement et, minorée par 0 (cf. 1)), elle converge.
- 3) Notons  $L$  la limite de notre suite, en passant à la limite dans la relation de récurrence satisfaite par  $(u_n)$ , il vient  $L = L - L^2$  donc  $\boxed{L = 0}$ .
- 4) D'après 1) aucun  $u_n$  n'est nul donc la suite  $(v_n)$  s'en trouve parfaitement définie.

Par ailleurs et pour tout  $n$  :  $v_n = \frac{1}{u_n - u_n^2} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n}{u_n - u_n^2} = \frac{1}{1 - u_n}$ .

Comme  $u_n \rightarrow 0$ , nous trouvons bien que  $\boxed{v_n \rightarrow 1}$ .

- 5) Notons  $(C_n)$  la césarisée de  $(v_n)$ , par le lemme de Cesaro nous avons  $\boxed{C_n \rightarrow 1}$ .

Un calcul explicite (fait en classe ce même jour) conduit par télescopage à  $\boxed{C_n = \frac{1}{(n+1)u_{n+1}} - \frac{1}{(n+1)u_0}}$ .

La conjonction de ces deux résultats donne  $\frac{1}{(n+1)u_{n+1}} \rightarrow 1$  soit enfin  $\boxed{u_n \sim \frac{1}{n}}$  ■

### Exercice 2 (Analyse)

Soient  $a \leq b$  deux nombres réels strictement positifs, on considère les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  définies par

$$\begin{cases} a_0 = a & b_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N} & a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \\ & b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \end{cases}$$

- 1) Que dire des suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  si  $a = b$ ?
- 2) Montrer que si  $(x, y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$ , on a

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

- 3) Démontrer que les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont monotones, puis qu'elles sont bornées.
- 4) Montrer que  $(a_n)$  et  $(b_n)$  convergent vers une même limite strictement positive.

On notera  $M(a, b)$  la limite commune aux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$ .

Nous posons alors  $I(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)}}$ .

5) On veut prouver l'égalité  $I(a, b) = I(a_1, b_1)$ .

i) Vérifier qu'il suffit de prouver que  $I(1 - k, 1 + k) = I(\sqrt{1 - k^2}, 1)$  pour tout  $k \in ]0, 1[$ .

ii) En posant  $t = \arcsin\left(\frac{(1+k)\sin(u)}{1+k\sin^2(u)}\right)$ , pour  $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , dans  $I(1 - k, 1 + k)$  pour prouver l'égalité du i).

On pourra se servir sans justification des relations suivantes :

$$\cos(t) = \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(u)} \cos(u)}{1 + k \sin^2(u)} \text{ et } \cos(t)dt = (1 + k) \frac{(1 - k \sin^2(u)) \cos(u)}{(1 + k \sin^2(u))^2} du.$$

6) En déduire que  $M(a, b)I(a, b) = \frac{\pi}{2}$ .

### Solution :

1) Elles sont constantes de terme égal à  $a$ .

2) Dans ce contexte  $\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{x+y-2\sqrt{xy}}{2} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2} \geq 0$ . Ce qui prouve le résultat.

3) On notera que les termes de ces deux suites sont strictement positifs.

Pour tout entier naturel  $n$  :

$a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n}(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n})$  et  $b_{n+1} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2}$ . Donc tout dépend du signe de  $a_n - b_n$ ; celui-ci est

négatif pour  $n = 0$  (donnée énoncé) et, pour  $n \geq 1$  :  $a_n - b_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}} - \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \leq 0$  (par 2). Il en

résulte que la suite  $(a_n)$  est croissante,  $(b_n)$  décroissante et que, pour tout  $n$   $\boxed{a_n \leq b_n}$ .

$(b_n)$  étant minorée par 0 converge. De plus  $a_n \leq b_n \leq b_0 = b$  donc  $(a_n)$  majorée converge aussi.

4) Notons  $L$  et  $L'$  les limites des suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$ , en passant à la limite dans la relation  $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ ,

nous obtenons  $L' = \frac{L + L'}{2}$  ou  $\boxed{L = L'}$  comme attendu.

$L > 0$  puisque  $a_0 > 0$  et que la suite  $(a_n)$  croît vers  $L$ .

5)  $\boxed{\text{Coquille fatale dans un exposant de la seconde formule}}$ .

On observe d'emblée que si  $a = b$  ce que l'on doit prouver est trivial puisque  $a = a_1$  et  $b = b_1$  donc on supposera dans la suite  $\boxed{a < b}$ .

i) L'égalité en vue est aussi  $b_1 I(a, b) = b_1 I(a_1, b_1)$  ce qui peut s'écrire  $I(\frac{a}{b_1}, \frac{b}{b_1}) = I(\frac{a_1}{b_1}, 1)$  puis en re-

marquant que  $\frac{b}{b_1} = \frac{2b}{a+b} \in ]1, 2[$ , il est loisible de poser  $k = \frac{b}{b_1} - 1 \in ]0, 1[$ . Dès lors (simples calculs)  $\frac{a}{b_1} = 1 - k$  et  $\frac{a_1}{b_1} = \sqrt{1 - k^2}$  et on a bien montré que l'égalité souhaitée découlera de la vérification de  $I(1 - k, 1 + k) = I(\sqrt{1 - k^2}, 1)$  pour tout  $k \in ]0, 1[$ .

ii) Pour  $u \in J = [0, \frac{\pi}{2}]$ , posons  $f(u) = \frac{(1+k)\sin(u)}{1+k\sin^2(u)}$ . Cette fonction est de classe  $C^1$  sur  $J$  et à valeurs

dans  $[0, 1]$ ; en effet (positivité immédiate)  $1 - f(u) = \frac{(1 - \sin(u))(1 - k \sin(u))}{1 + k \sin^2(u)} \geq 0$  (On remarquera que

$f(u) = 1$  ssi  $u = \frac{\pi}{2}$ ); on définit notre changement de variable en posant  $t = g(u)$ , où  $g = \arcsin \circ f$  et  $u$  dans

$J$ . Puisque  $\arcsin$  n'est pas dérivable en 1 (un changement de variable de première année doit être  $C^1$  ici il ne l'est que sur  $[0, \frac{\pi}{2}[$ ) il faut se demander si  $g$  est néanmoins  $C^1$  sur  $J$ . Les formules données par l'énoncé

permettent de donner l'expression de  $g'(u) = \frac{dt}{du} = (1+k) \frac{1 - k \sin^2(u)}{(1 + k \sin^2(u))\sqrt{1 - k^2 \sin^2(u)}}$  sur  $[0, \frac{\pi}{2}[$ . On voit

alors que  $g'$  possède une limite finie en  $\frac{\pi}{2}$ . Le théorème du prolongement de la dérivée prouve que  $g$  est bien

$C^1$  sur  $J$ . On peut donc réaliser ce changement de variable.

On pose donc dans  $I(1 - k, 1 + k)$   $t = g(u)$  et on dispose de :

$g(0) = 0$ ,  $g(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$  puis de  $\sin(t) = f(u) = \frac{(1+k)\sin(u)}{1+k\sin^2(u)}$  et de  $\cos(t) = \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(u)} \cos(u)}{1 + k \sin^2(u)}$  (selon

énoncé), ce pour tout  $t \in J$ .

Plus haut nous avons obtenu  $\boxed{\frac{dt}{du} = (1+k) \frac{1 - k \sin^2(u)}{(1 + k \sin^2(u))\sqrt{1 - k^2 \sin^2(u)}}}$ . Il en ressort que après simplifi-

cation nous trouvons :

$$I(1 - k, 1 + k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - k \sin^2(u)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(u)} \sqrt{(1 - k)^2 \sin^2(u) + \cos^2(u)(1 - k^2 \sin^2(u))}} du.$$

Enfin, pour tout  $u \in J$ , il vient  $(1-k)^2 \sin^2(u) + \cos^2(u)(1-k^2 \sin^2(u)) = (1-k)^2 \sin^2(u) + (1-\sin^2(u))(1-k^2 \sin^2(u)) = 1 - 2k \sin^2(u) + k^2 \sin^4(u) = (1-k^2 \sin^2(u))^2$

Ainsi  $I(1-k, 1+k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1-k^2 \sin^2(u)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{\cos^2(u) + \sin^2(u) - k^2 \sin^2(u)}} = I(\sqrt{1-k^2}, 1)$  ■

6) Selon 5) on a donc, pour tout entier  $n$ ,  $I(a_n, b_n) = I(a, b)$ . Mais la croissance de l'intégrale (on sait que  $a_n \leq b_n$  pour tout  $n$ ) fait que et dans le même contexte  $I(b_n, b_n) \leq I(a, b) \leq I(a_n, a_n)$ . Les intégrales encadrantes se calculent facilement et on en déduit que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{\pi}{2b_n} \leq I(a, b) \leq \frac{\pi}{2a_n}$ .

Le théorème des gendarmes (les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont adjacentes et convergent vers  $M(a, b)$ ) conduit au résultat désiré ■

### Exercice 3 (Analyse)

Dans cet exercice, on utilisera les notations suivantes:

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  désigne le  $\mathbb{R}$  espace vectoriel des suites à termes réels.

$E$  désigne le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  constitué des suites  $(u_n)$  convergentes telles que :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall k \geq N, u_k \neq \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$$

A toute suite  $(u_n)$  appartenant à  $E$  de limite égale à  $L$ , on associe la suite  $(u_n^c)$  définie à partir d'un certain rang par :  $u_n^c = \left| \frac{u_{n+1} - L}{u_n - L} \right|$ .

$E^c$  désigne l'ensemble des éléments  $(u_n)$  de  $E$  tels que  $(u_n^c)$  soit convergente.

Enfin si  $(u_n)$  appartient à  $E^c$ , en notant  $L^c$  la limite de  $(u_n^c)$ , on dit que la vitesse de convergence de la suite  $(u_n)$  (vers sa limite) est :

- lente si  $L^c = 1$ ,
- géométrique de rapport  $L^c$  si  $L^c \in ]0, 1[$  et
- rapide si  $L^c = 0$ .

1) Montrer que l'ensemble  $E^c$  est non vide.

2) L'ensemble  $E^c$  est-il un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ?

3) Montrer que  $E^c$  est strictement inclus dans  $E$ .

4) Soit  $(u_n)$  appartenant à  $E^c$ . Vérifier que  $L^c \in [0, 1]$ .

5) Soient  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $q \in ]0, 1[$ , établir que les suites  $\left( \frac{1}{(n+1)^k} \right)_n$ ,  $(n^k q^n)_n$  et  $\left( \frac{1}{n!} \right)_n$  sont dans  $E^c$  et préciser leur vitesse de convergence.

6) On pose, pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n = (1 + \frac{1}{2^n})^{2^n}$ .

a) Prouver qu'au voisinage de  $+\infty$  (i.e si  $n \rightarrow +\infty$ ) :  $v_n = e - \frac{e}{2^{n+1}} + o(\frac{1}{2^n})$ .

b) En déduire que  $(v_n)$  est un élément de  $E^c$  dont on donnera la vitesse de convergence.

### Solution :

1) La suite géométrique  $(2^{-n})$  appartient à  $E^c$  ■

2) Non, puisque le vecteur nul de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  ne peut y appartenir (puisque'elle stationne sur sa limite) ■

3) Considérons la suite  $(u_n)$  dont le terme général est défini  $u_n = \begin{cases} 2^{-n} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 3^{-n} & \text{sinon} \end{cases}$ ; cette suite converge bien vers 0 et aucun de ses termes n'est nul; c'est donc bien un élément de  $E$ .

Mais  $(u_{2n-1}^c = \frac{3^{2n-1}}{2^{2n}})$  diverge vers  $\infty$ , ce qui souligne l'inclusion stricte voulue ■

4) Par conservation des inégalités à la limite on a immédiatement  $L^c \geq 0$ . Supposons que  $L^c > 1$ ; on sait alors qu'il existe un entier naturel  $m$  et un réel  $q > 1$  (propriété des limites) tels que à partir du rang  $m$  on ait  $u_n^c \geq q$  ou encore  $|u_{n+1} - L| \geq q |u_n - L|$ . Ainsi par simple récurrence il vient pour tout  $n \geq m$  :  $|u_n - L| \geq q^{n-m} |u_m - L|$ . Ce qui interdit à la suite  $(u_n)$  de converger vers  $L$ . La conclusion s'impose par l'absurde ■

5) Les trois suites convergent vers 0 et sont à termes strictement positifs donc dans  $E$ .

On vérifie aisément que leur vitesse de convergence est (respectivement) lente, géométrique et rapide ■

6)a) Pour  $n \rightarrow +\infty$ ,  $v_n = \exp(2^n \ln(1 + 2^{-n})) = \exp(2^n(2^{-n} - 2^{-2n+1} + o((2^{-2n+1}))),$  avec utilisation du DL(0) à l'ordre deux de  $\ln(1+u)$ .

On a donc bien, dans le même cadre,  $v_n = e(\exp(-2^{-n-1} + o(2^{-n-1}))) = e - \frac{e}{2^{n+1}} + o(\frac{1}{2^n})$ , avec un DL1(0) de l'exponentielle ■

b) La question précédente donne immédiatement  $v_n^c \sim \frac{1}{2}$  donc que  $\boxed{\text{la vitesse de convergence est géométrique}}$  ■