
TD1 : Corrigé de Révisions et compléments de sup

Suites

Exercice 1 : (Suites extraites)

On suppose que les suites (x_{2n}) , (x_{2n+1}) et (x_{3n}) convergent.

En considérant les suites (x_{6n}) , et (x_{6n+3}) , montrer que la suite (x_n) converge.

Solution : Notons a, b et c les limites respectives des trois suites extraites (x_{2n}) , (x_{2n+1}) et (x_{3n}) .

En montrant que $a = b$, nous prouverons (par théorème) que (x_n) converge.

(x_{6n}) est suite extraite de (x_{2n}) donc converge vers a mais c'est aussi une suite extraite de (x_{3n}) donc converge vers c .

Par unicité limite $a = c$.

(x_{6n+3}) est suite extraite de (x_{2n+1}) donc converge vers b mais c'est aussi une suite extraite de (x_{3n}) donc converge vers c .

Par unicité limite $b = c$.

Donc, comme souhaité $\boxed{a = b}$ ■

Exercice 2 (Cesaro)

Soient (x_n) une suite monotone et (C_n) sa césarisée.

Que dire de la monotonie de cette dernière? Comparer les limites des deux suites.

Solution : On suppose (x_n) croissante (le cas décroissant s'obtient en passant à l'opposé).

Pour tout n , $C_{n+1} - C_n$ est du signe de $(n+1)x_{n+1} - \sum_{k=0}^n x_k = \sum_{k=0}^n (x_{n+1} - x_k) \geq 0$, ce par croissance de

(x_n) . Ainsi il en va de même pour (C_n) .

Premier cas (x_n) converge vers L : par le théorème de Cesaro, c'est pareil pour (C_n) .

Deuxième cas (x_n) diverge vers $+\infty$: supposons que (C_n) converge vers un réel L , on sait alors qu'il existe un entier n_0 tel que $x_n \geq L+1$ pour tout $n \geq n_0$ (puisque $x_n \rightarrow +\infty$).

Dès lors et pour ces mêmes entiers n , on a $C_n = \frac{\sum_{k=0}^{n_0-1} x_k}{n+1} + \frac{\sum_{k=n_0}^n x_k}{n+1} \geq \frac{A + (n+1-n_0)(L+1)}{n+1}$, où on

a posé $A = \sum_{k=0}^{n_0-1} x_k$.

Par conservation des inégalités à la limite, nous obtenons alors $L \geq L+1$, ce qui est absurde.

Il en résulte que (C_n) , suite croissante, diverge donc $C_n \rightarrow +\infty$.

Autrement dit quelque soit le cas de figure, (x_n) et (C_n) ont la même limite ■

Exercice 3 (Suites récurrentes linéaires)

1) Trouver la suite numérique (v_n) telle que : $v_0 = 2, v_1 = 3$ et $\forall n, v_{n+2} - 2v_{n+1} + v_n = 0$. (Rép: $v_n = n+2$).

2) Trouver la suite numérique (v_n) telle que : $v_0 = 0, v_1 = 1$ et $\forall n, v_{n+2} - 5v_{n+1} + 6v_n = 0$. (Rép: $v_n = 3^n - 2^n$).

3) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1, u_1 = 2$ et $\forall n, u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}$. Trouver la limite de cette suite. (Rép: $\sqrt[3]{4}$, en passant au $\ln$!)

4) Déterminer la suite numérique (v_n) telle que : $v_0 = 1, v_1 = -\frac{1}{2}$ et $\forall n, v_{n+2} + v_{n+1} + v_n = 0$.

Exercice 4 (Suite récurrente)

On prend $u_0 > 0$ et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.

a) Vérifier que cette suite est bien définie et qu'elle est décroissante.

b) Etablir qu'elle converge vers 0.

On pose $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$.

c) Prouver que la suite (v_n) converge.

d) En déduire, à l'aide du théorème de Cesaro, un équivalent de la suite (u_n) .

Solution : a) On montre par récurrence que u_n est défini et positif pour tout n .

L'inégalité de convexité (cf cours première année) $\ln(1+x) \leq x$ (valable si $x \geq -1$) donne immédiatement la décroissance voulue.

b) Par ce qui précède la suite (u_n) décroît et est minorée par 0, elle converge bien vers un réel $L \geq 0$. En passant à la limite dans la relation de récurrence vérifiée par (u_n) , on obtient $L = \ln(1+L)$.

L'étude des variations de $x \geq 0 \rightarrow x - \ln(1+x)$ montre que cette fonction ne s'annule qu'en 0 et que nécessairement $L = 0$.

c) Cette nouvelle suite est parfaitement définie puisque $u_n \neq 0$ pour tout n .

Par ailleurs $v_n = \frac{u_n - \ln(1+u_n)}{u_n \ln(1+u_n)}$.

Comme $u_n \rightarrow 0$, nous disposons des informations suivantes : $\ln(1+u_n) \sim u_n$ et $\ln(1+u_n) = u_n - \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2)$,

ce qui permet d'écrire que $v_n \sim \frac{u_n^2}{2u_n^2} = \frac{1}{2}$.

Autrement dit $v_n \rightarrow \frac{1}{2}$.

d) En s'inspirant du cours, on a $\boxed{u_n \sim \frac{2}{n}}$ ■

Exercice 5 (Suite définie implicitement)

Pour tout entier naturel n on pose $f_n(x) = x^n e^x$, ce pour $x \geq 0$.

a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ possède une unique racine notée x_n . Vérifier que $x_n \leq 1$.

b) En évaluant, pour n quelconque, $f_n(x_{n+1})$, déterminer le sens de monotonie de la suite (x_n) .

c) Prouver que (x_n) converge vers 1 puis que $x_n - 1 \sim \frac{-1}{n}$.

d) De façon plus générale établir que $x_n = 1 - \frac{1}{n} + \frac{3}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$.

Solution : a) et b) corrigés en détail en classe.

c) On a donc pour tout $n \geq 1$: $x_n^n = e^{-x_n}$ donc avec le $\ln$ il vient $\ln(x_n) = \frac{-x_n}{n}$ (1).

Comme la suite (x_n) est à termes dans $[0,1]$, la suite $(\frac{-x_n}{n})$ converge vers 0 donc $\ln(x_n) \rightarrow 0$ et la suite (x_n) converge bien vers 1.

Posons alors $y_n = x_n - 1$ (par ce qui précède cette suite converge vers 0).

(1) devient alors $\ln(1+y_n) = \frac{-1}{n} - \frac{y_n}{n}$. (2)

Un équivalent du membre de gauche est y_n et du membre de droite $\frac{-1}{n}$ d'où $y_n \sim \frac{-1}{n}$.

d) C'est un peu plus technique mais procède de la même intention : on pose $z_n = y_n + \frac{1}{n}$ et on reporte cela dans (2) :

$$\ln(1 - \frac{1}{n} + z_n) = -\frac{1}{n} - \frac{z_n}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

Noter que puisque $y_n \sim \frac{-1}{n}$ alors $z_n = o(\frac{1}{n})$, ce qui donne $-\frac{1}{n} - \frac{z_n}{n} + \frac{1}{n^2} = -\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$.

Enfin $\ln(1 - \frac{1}{n} + z_n) = -\frac{1}{n} + z_n - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$ (via DL2 de $\ln(1+u)$ et du fait que z_n soit négligeable devant $\frac{1}{n}$). Des deux derniers points on déduit que $z_n = \frac{3}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$ ■

Exercice 6 (Lemme de l'escalier)

On se donne une suite (u_n) telle que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$, où a est un réel (ou un complexe) non nul. Établir que $u_n \sim an$. Ce résultat est-il encore valable si $a = 0$?

Solution : Pour la première partie il suffit (et télescopage) d'appliquer le lemme de Cesaro à la suite $(u_{n+1} - u_n)$.

Non! Prendre (pour tout n et par exemple) $u_n = \sum_{k=0}^n 2^{-k} = \frac{1 - 2^{-n-1}}{1 - 1/2} \rightarrow 2$ alors que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ■

Sommes de Riemann**Exercice 7** (CCINP, IMT, Mines)

a) Limite de $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(1 + \frac{k}{n})$? En déduire celle de $v_n = (\frac{(2n)!}{n!n^n})^{1/n}$.

b) Limite de $S_n = \sum_{k=1}^n \sin \frac{k}{n} \sin \frac{k}{n^2}$?

c) (Plus difficile) soient f continue et g de classe C^1 sur $[0, 1]$.

Prouver que $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n})g(\frac{k+1}{n}) \rightarrow \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

Solution : c) Posons $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n})g(\frac{k+1}{n})$ et $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n})g(\frac{k}{n})$, ce pour tout $n \geq 1$. On reconnaît

en v_n une somme de Riemann d'ordre n de la fonction continue fg . Donc $v_n \rightarrow \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

Nous allons montrer pour conclure que $v_n - u_n \rightarrow 0$.

La régularité de g fait qu'il existe un réel positif M tel que : $\forall (x, y) \in [0, 1]^2, |g(y) - g(x)| \leq M|y - x|$ (Accroissements finis).

Ainsi, en utilisant d'abord l'inégalité triangulaire, il vient :

$|v_n - u_n| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |f(\frac{k}{n})| |g(\frac{k+1}{n}) - g(\frac{k}{n})| \leq \frac{M}{n} S_n$, où S_n est une somme de Riemann d'ordre n de la fonction

continue $|f|$; cette suite convergeant notre objectif est atteint ■

Polynômes**Exercice 8** (★) (Polynômes d'Hurwitz : Mines 2022 PSI)

$P \in \mathbb{R}[X]$, non constant, est un polynôme d'Hurwitz si toutes ses racines (complexes) ont une partie réelle strictement négative.

a) On se donne un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ à coefficients strictement positifs et a une racine réelle de P .

Prouver que a est strictement négatif.

b) Démontrer que tout diviseur non constant d'un polynôme d'Hurwitz est du même type.

c) Soit P un polynôme d'Hurwitz irréductible et à coefficient dominant positif. Vérifier que tous les coefficients de P sont strictement positifs.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$.

On définit les deux polynômes P et Q de $\mathbb{C}[X]$ par :

$$P(X) = \prod_{k=1}^n (X - z_k) \quad \text{et} \quad Q(X) = \prod_{(k,\ell) \in ([1,n])^2} (X - z_k - z_\ell).$$

d) On suppose $n = 2$ et $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Si les coefficients de Q sont strictement positifs, P est-il alors un polynôme d'Hurwitz?

e) Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ dont tous les coefficients sont strictement positifs. Démontrer que les coefficients du produit AB sont également strictement positifs.

f) Démontrer que si P et Q sont dans $\mathbb{R}[X]$, alors on a l'équivalence: P est un polynôme d'Hurwitz si et seulement si les coefficients de P et Q sont strictement positifs.

Solution : a) P ne pouvant posséder aucune racine réelle positive, le résultat en découle ■

b) Puisque les racines du diviseur sont aussi celles du dividende donc... ■

c) Il suffit de raisonner par récurrence sur le degré.

Pour le degré 1, on dispose de $aX + b$, avec $a > 0$ et $b > 0$ en vertu de la définition d'un polynôme de Hurwitz.

Pour le degré 2, si les racines sont réelles alors elles sont strictement négatives et notre polynôme est à coefficients > 0 .

Si les racines sont complexes et dès lors conjuguées et à partir réelle < 0 , la somme de ces racines est < 0 et leur produit > 0 donc notre polynôme est à coefficients > 0 .

Supposons que tout polynôme de Hurwitz de degré $\leq n$, de coefficient dominant possède des coefficients strictement positifs.

Soit P un polynôme de Hurwitz de degré $n + 1$, où $n \geq 2$, de coefficient dominant $a > 0$. P possède un diviseur D , à coefficients réels, de degré 1 ou 2 et de coefficient dominant a et il existe Q unitaire de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P = QD$; il suffit alors d'appliquer l'hypothèse de récurrence à Q et D pour conclure.

d) Comme z_1 et z_2 sont conjugués, il suffit de savoir si $S = z_1 + z_2$ est strictement négatif.

On notera que $Q = (X - S)^2(X - 2z_1)(X - 2z_2) = (X - S)^2(X^2 - 2SX + 4P)$, où $P = z_1 z_2$.

Le coefficient du terme en X^3 de Q vaut donc $-4S$ et celui-ci est > 0 par hypothèse, P s'en trouve bien être un polynôme d'Hurwitz ■

e) Sans difficulté aucune ■

f) Supposons que P soit d'Hurwitz alors P est le produit de facteurs irréductibles (sur $\mathbb{R}$) unitaires (i.e de coefficients dominants égaux à 1); ces facteurs sont eux aussi (par b)) d'Hurwitz donc (grâce à c)) sont à coefficients > 0 et P l'est encore (en appliquant e)).

Q est aussi d'Hurwitz (car à coefficients réels car ses racines sont réelles ou groupables conjuguées 2 à 2, par la même structure pour les racines de P) et on effectue sur Q le raisonnement tenu sur P . Ainsi Q est-il à coefficients > 0 .

Inversement si les coefficients de P et Q sont strictement positifs.

a) montre déjà que les racines réelles de P sont bien strictement négatives. Considérons alors z_k une racine de P non réelle dont la partie imaginaire est notée a . Alors $\bar{z}_k$ est aussi une racine de P , il existe donc $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $z_j = \bar{z}_k$. Mais $z_j + z_k = 2a$ est alors une racine réelle de Q dont tous les coefficients sont > 0 . Il en résulte (avec la question a)) que $2a < 0$.

P est bien un polynôme d'Hurwitz ■

Exercice 9 (Polynômes scindés réels, classique)

a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, scindé sur $\mathbb{R}$, prouver (si $\deg(P) \geq 2$) que P' est aussi scindé.

b) On suppose que $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré $n \geq 1$, possède n racines réelles distinctes.

Etablir que $P + P'$ possède aussi n racines réelles distinctes.

Solution : a) On pose n comme étant le degré de P . Notons $x_1 < \dots < x_s$ les différentes racines (réelles nécessairement ici) de P et $m_1, \dots, m_s$ leurs multiplicités respectives relativement à P ($n = \sum_{i=1}^s m_i$, ce puisque P scindé sur $\mathbb{R}$). On peut aussi sans perte de généralité supposer P unitaire, ce qui permet d'écrire que :

$P = (X - x_i)^{m_i} Q_i$, ce pour tout $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$, où $Q_i \in \mathbb{R}[X]$.

Par simple dérivation des deux membres de cette égalité, il vient que $(X - x_i)^{m_i-1} | P'$.

Bilan 1 : $\exists Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P' = Q \prod_{i=1}^s (X - x_i)^{m_i-1}$ et $d^\circ(Q) = s - 1$.

Remarquons que si $s = 1$, l'objectif est atteint et supposons désormais que $s \geq 2$.

Fixons maintenant $i \in \llbracket 1, s - 1 \rrbracket$; par application du théorème de Rolle à P sur le segment $[x_i, x_{i+1}]$ ($P(x_i) = P(x_{i+1}) = 0$ et P dérivable sur $[x_i, x_{i+1}]$), il existe $c_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que $P'(c_i) = 0$.

Sont ainsi mis en évidence $s - 1$ racines de P' toutes différentes de $x_1, \dots, x_s$ (elles s'intercalent), ce sont donc des (et même les racines de Q qui s'en trouve scindé (à racines simples) sur $\mathbb{R}$. Ceci entraîne :

Bilan 2 : P' est scindé sur $\mathbb{R}$ et il même scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples s'il en est déjà ainsi pour P .

Le résultat désiré est trivial pour les polynômes à coefficients complexes puisque tout polynôme non constant est scindé mais le raffinement que contient le bilan 2 est faux. $X^4 - 1$ est scindé sur $\mathbb{C}$ à racines complexes alors que ce n'est plus vrai pour son polynôme dérivé ■

b) On note $x_1 < \dots < x_n$ les n racines réelles de notre polynôme et on considère $f : x \rightarrow e^x P(x)$ qui est

donc une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. En appliquant le théorème de Rolle à f sur chaque segment $[x_i, x_{i+1}]$ pour $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on trouve $c_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que $f'(c_i) = 0 \iff (P + P')(c_i) = 0$. On met en évidence $n-1$ racines pour $P + P'$ $c_1, \dots, c_{n-1}$ qui sont disposées ainsi $x_1 < c_1 < x_2 < c_2 < \dots < x_{n-1} < c_{n-1} < x_n$. Pour conclure (le degré de $P + P'$ valant n), il nous suffit de trouver une autre racine pour $P + P'$ ou pour f' . Pour cela on raisonne par l'absurde. Supposons que f' (donc $P + P'$) ne s'annule pas sur $] -\infty, x_1[$ donc f' est de signe constant sur cet intervalle donc strictement monotone. C'est absurde puisque $f(x_1) = 0$ et (croissance comparée) $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$; ainsi il existe donc $c_0 < x_1$ en lequel f' s'annule. Ceci nous permet de conclure ■

NB : Même résultat pour $aP + P'$, où $a \in \mathbb{R}$.

■

Exercice 10 (★★)

On se propose de caractériser les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$.

On note E leur ensemble et F celui des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ somme de deux carrés de polynômes de $\mathbb{R}[X]$.

- Comparer simplement E et F .
- Vérifier que F est stable par produit.
- Prouver que $E = F$.