

Corrigé du DS1 (4h).

La rédaction, l'argumentation et la présentation matérielle entrent dans une part significative de la notation; vous devrez aussi respecter la terminologie et les règles d'usage en vigueur. Les exercices, problèmes sont indépendants. Les résultats numériques seront encadrés et simplifiés. Si vous êtes amené à repérer ce qui peut vous sembler une erreur d'énoncé, vous êtes prié de le signaler sur votre copie et devrez poursuivre votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous prendriez.

Calculatrices autorisées.

Exercice 1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} 5^{\frac{k}{n}}$ et on note $f : x \in [0, 1] \rightarrow 5^x$.

- 1) Déterminer la limite de la suite $(\frac{u_n}{n})_{n \geq 1}$; en déduire un équivalent de u_n .
- 2) En explicitant u_n retrouver l'équivalent précédent.

Solution 1 1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n(f) = \frac{1}{n}u_n$; la continuité de f sur $[0, 1]$ et le théorème de Riemann sur ses sommes nous assurent que la suite $(S_n(f))$ converge vers $\int_0^1 f = L$. Cette dernière se calcule sans

peine car $I = \left[\frac{e^{x \ln(5)}}{\ln(5)} \right]_0^1 = \frac{4}{\ln(5)}$. Dès lors $u_n \sim \frac{4n}{\ln(5)}$ ■

2) On reconnaît en u_n la somme d'une progression géométrique de raison $q = 5^{\frac{1}{n}}$, ce qui donne $u_n = \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{4}{e^{\frac{\ln(5)}{n}} - 1} \sim \frac{4n}{\ln(5)}$ par équivalent usuel ■

Exercice 2

Pour x réel, différent de ± 1 et $t \in [0, 2\pi]$, on pose $f_x(t) = \ln(x^2 - 2x \cos(t) + 1)$.

- 1) Justifier la définition et la continuité de f_x sur $[0, 2\pi]$.

On pose $I(x) = \int_0^{2\pi} f_x(t) dt$.

- 2) A l'aide du changement de variable $t = 2\pi u$, $u \in [0, 1]$ à effectuer dans $I(x)$, établir que :

$$\frac{2\pi}{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \ln(x^2 - 2x \cos(\frac{2k\pi}{n}) + 1) \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} I(x).$$

- 3) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel x : $(x^n - 1)^2 = \prod_{k=0}^{n-1} (x^2 - 2x \cos(\frac{2k\pi}{n}) + 1)$.

- 4) En déduire que $I(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| < 1 \\ 4\pi \ln(|x|) & \text{sinon} \end{cases}$.

- 5) Donner, en fonction de x , la valeur de $\int_0^\pi f_x(t) dt$.

Solution 2 1) Pour répondre et grâce aux opérations sur les fonctions continues, il nous suffit de montrer que $x^2 - 2x \cos(t) + 1 > 0$ pour tout réel t et tout réel $x \neq \pm 1$.

Fixons t et considérons la fonction $x \rightarrow x^2 - 2x \cos(t) + 1$; sa valeur minimale est atteinte en $x = \cos(t)$ et celle-ci vaut $1 - \cos^2(t) > 0$ si $x \neq \pm 1$ donc la quantité à étudier est bien strictement positive ■

2) En effectuant servilement le changement de variable préconisé, il vient :

$$I(x) = 2\pi \int_0^1 \ln(x^2 - 2x \cos(2\pi u) + 1) du.$$

Dès lors le théorème sur les sommes de Riemann, appliqué à la fonction continue $x \in [0, 1] \rightarrow f(2)$, conduit aisément au résultat ■

3) On doit savoir (première année) que, pour tout réel x : $x^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (x - \exp(\frac{2ik\pi}{n})) = \prod_{k=0}^{n-1} (x - \exp(\frac{-2ik\pi}{n}))$

$$\text{donc que } (x^n - 1)^2 = \prod_{k=0}^{n-1} (x - \exp(\frac{2ik\pi}{n}))(x - \exp(\frac{-2ik\pi}{n})) = \prod_{k=0}^{n-1} (x^2 - 2x \cos(\frac{2k\pi}{n}) + 1).$$

4) Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = \frac{2\pi}{n} (\sum_{k=0}^{n-1} \ln(x^2 - 2x \cos(\frac{2k\pi}{n}) + 1))$; d'après la question précédente :

$$T_n = \frac{2\pi}{n} (\ln(x^n - 1)^2) \text{ et par la question 2) } T_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} I(x).$$

Examinons les deux cas suggérés par l'énoncé :

i) $|x| < 1$ alors $\ln(x^n - 1)^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ donc $\boxed{I(x) = 0}$.

ii) $|x| > 1$ alors $\ln(x^n - 1)^2 = \ln(x^{2n}(1 - \frac{1}{x^n})) = 2n \ln(|x|) + \ln(1 - \frac{1}{x^n})$ et $T_n \sim 4\pi \ln(|x|)$ d'où

$$\boxed{I(x) = 4\pi \ln(|x|)} \quad \blacksquare$$

5) f_x étant pi périodique et faire $\boxed{\int_0^\pi f_x(t) dt = \frac{I(x)}{2}}$ ■

Exercice 3

Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t) dt$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n}(t) dt$.

On donne (pour tout n) $I_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2}$ et on posera $u_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}$

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A l'aide d'intégrations par parties, établir que :

$$I_n = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n.$$

2) En déduire (dans le même contexte) que : $\frac{\pi}{4n^2} = u_{n-1}J_{n-1} - u_n J_n$.

Pour $N \in \mathbb{N}^*$ on définit $S_N = \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}$.

3) Prouver que $S_N = J_0 - u_N J_N$, ce pour tout $N \in \mathbb{N}^*$.

4) Vérifier que $J_0 = \frac{\pi^3}{24}$.

5) Prouver par encadrement que la suite $(u_N J_N)$ converge vers 0.

6) Déterminer la limite de la suite $(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2})_N$. C'est un résultat mythique du grand Euler.

Solution 3 1) On procède à deux intégrations par parties (en primitivant 1 puis t) dans I_n (les fonctions en jeu étant C^∞ sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$ à $n \geq 1$ quelconque :

$$I_n = 0 + 2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin(t) \cos^{2n-1}(t) dt = 0 - n \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n}(t) dt + n(2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \sin^2(t) \cos^{2n-2}(t) dt \text{ soit aussi}$$

$$I_n = -nJ_n + n(2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 (1 - \cos^2(t)) \cos^{2n-2}(t) dt = -nJ_n + n(2n-1)(J_{n-1} - J_n) = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n \blacksquare$$

2) Dans le même contexte l'égalité précédente peut s'écrire $\frac{\pi}{2u_n} = 2n^2 \left(\frac{2n-1}{2n} - J_n \right)$ donc aussi

$$\frac{\pi}{4n^2} = \left(\frac{(2n-1)u_n}{2n} - u_n J_n \right).$$

$$\text{Mais } \frac{(2n-1)u_n}{2n} = \frac{4^n (n!)^2}{(2n-2)!(2n)^2} = u_{n-1}, \text{ d'où le résultat voulu } \blacksquare$$

$$\text{Rq : Comme } I_n = \frac{\pi}{2u_n} \text{ alors } I_{n-1} - I_n = \frac{\pi}{2u_n(2n-1)} \quad (1).$$

3) Simple télescope avec $u_0 = 1$ avec la relation obtenue en 2) $\blacksquare$

4) ? $\blacksquare$

5) Notre suite étant positive, il nous suffit de la majorer par une suite convergeant vers 0. Soit $N \in \mathbb{N}^*$:

en utilisant l'inégalité (concavité sinus sur $[0, \frac{\pi}{2}]$) $\frac{2}{\pi}t \leq \sin(t)$ pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, il vient

$$J_N \leq \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) \cos^{2N}(t) dt = \frac{\pi^2}{4} (I_N - I_{N+1}) \text{ donc, avec (1), } u_N J_N \leq \frac{\pi^3}{8(2N+1)} \text{ et le résultat en vue est atteint via le théorème des gendarmes } \blacksquare$$

$$6) \text{ On trouve sans peine que cette suite converge vers } \boxed{\frac{\pi^2}{6}} \blacksquare$$

Exercice 4

On note $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et F l'ensemble des fonctions de la forme : $x \in \mathbb{R} \rightarrow P(x)chx + Q(x)shx$, où P, Q sont des éléments de $\mathbb{R}_2[X]$.

1) Etablir que F est un sous-espace vectoriel de E .

On pose, pour tout réel x , $f_i(x) = x^i chx$, $g_i(x) = x^i shx$, $0 \leq i \leq 2$.

2) Prouver que $b = (f_0, f_1, f_2, g_0, g_1, g_2)$ est une base de F .

On note $D : f \in F \rightarrow f'$.

3) Vérifier que $D \in L(F)$.

4) Déterminer $\text{Ker}(D^2 - id_F)$, où $D^2 = D \circ D$.

5) Préciser la matrice de D dans la base b .

On note M cette matrice et on admet que $(M^2 - I_6)^3 = 0_6$, où I_6 désigne la matrice unité 6×6 et 0_6 la matrice nulle de même taille.

6) En déduire que tout élément de F est solution de l'équation différentielle : $y^{(6)} - 3y^{(4)} + 3y'' - y = 0$.

Solution 4 1) et 2) Chaque f_i ou g_i est une fonction C^∞ et, par définition de cet ensemble, $F = \text{Vect}(f_0, f_1, f_2, g_0, g_1, g_2)$.

Ainsi F est bien un sev de E et b engendre F .

Montrons maintenant que b forme une famille libre. Donnons nous, pour cela $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ 6 réels tels que : $\sum_{i=0}^2 a_i f_i + \sum_{i=0}^2 b_i g_i = 0_E$.

En spécialisant en 0, on récupère $a_0 = 0$. En observant que $a_1 f_1 + b_0 g_0 + b_2 g_2$ est impaire alors que $a_2 f_2 + b_1 g_1$ est paire et en utilisant le fait que les sev des fonctions paires et impaires sont en somme directe, on obtient : $a_2 f_2 + b_1 g_1 = 0_E$ et $a_1 f_1 + b_0 g_0 + b_2 g_2 = 0_E$.

Comme f_2 et g_1 ne sont pas colinéaires : $a_2 = b_1 = 0$. En divisant par g_2 et avec $x \rightarrow +\infty$, il vient $b_2 = 0$ la non colinéarité de f_1 et g_0 finit par donner $b_0 = a_1 = 0$; la famille b est bien libre donc une base de E ■

3) La dérivation étant linéaire, il suffit de contrôler que la dérivée de chaque élément de b reste dans b . Or un calcul simple prouve que : $f'_0 = g_0, f'_1 = f_0 + g_1, \dots$ ■

4) Il suffit de résoudre $y'' - y = 0$. Donc le noyau cherché est $\text{Vect}(f_0, g_0)$.

5) En utilisant les calculs du 3) : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ■

6) Dès lors $D^6 - 3D^4 + 3D^2 - \text{id}_E = 0$, le résultat en découle ■

Exercice 5

Soit $f \in L(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est : $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 \\ 5 & -6 & 10 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Soit P le plan d'équation $x - y + z = 0$.

1) Donner une base de celui-ci et montrer qu'il est stable par f .

2) Prouver que $F = \text{Vect}(-1, 1, 1)$ est un supplémentaire de P également stable par f .

Solution 5 1) $((1, 1, 0), (0, 1, 1))$.

Supposons $(x, y, z) \in P$ alors $f(x, y, z) = (3x - 4y + 8z, 5x - 6y + 10z, x - y + z) = (X, Y, Z)$ et $X - Y + Z = -x + y - z = 0$. D'où la stabilité désirée ■

2) Prenons $(x, y, z) \in P \cap F$ alors $x - y + z = 0$ et $-x = y = z$ donc F et P sont en somme directe. La somme de leur dimension valant 3, ils sont bien supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Puisque $f(-1, 1, 1) = (1, -1, -1) = -(-1, 1, 1)$, F , droite vectorielle engendrée par $(-1, 1, 1)$ est bien stable par f ■

Exercice 6

On rappelle le théorème de la division euclidienne pour les polynômes : si $U \in \mathbb{C}[X]$ et $V \in \mathbb{C}[X]$ sont deux polynômes avec $V \neq 0$, alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{C}[X]^2$ tel que :

$$U = VQ + R \quad \text{avec} \quad (R = 0 \quad \text{ou} \quad \deg(R) < \deg(V)) .$$

Les polynômes Q et R sont respectivement appelés le quotient et le reste dans la division euclidienne du polynôme U par V .

Dans cet exercice, on se donne un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un couple $(A, B) \in \mathbb{C}_n[X] \times \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(B) = n + 1$. On considère également l'application φ définie sur $\mathbb{C}_n[X]$ qui à un polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$ associe le reste dans la division euclidienne de AP par B .

Par exemple, si on suppose que l'on a :

$$n = 2, \quad A = X^2, \quad B = X^3 - X, \quad P = X^2 + X + 1,$$

alors, en effectuant la division euclidienne de AP par B , on obtient :

$$AP = X^4 + X^3 + X^2 = BQ + R \quad \text{avec} \quad Q = X + 1 \quad \text{et} \quad R = 2X^2 + X,$$

donc on a $\varphi(P) = 2X^2 + X$.

Partie I - Généralités sur l'application φ

Dans cette partie, on démontre que l'application φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.

1. Justifier que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on a $\varphi(P) \in \mathbb{C}_n[X]$.

On considère deux polynômes $P_1 \in \mathbb{C}_n[X]$ et $P_2 \in \mathbb{C}_n[X]$. Par le théorème de la division euclidienne rappelé dans la présentation, il existe $(Q_1, R_1) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$ et $(Q_2, R_2) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$ tels que :

$$AP_1 = BQ_1 + R_1 \quad \text{et} \quad AP_2 = BQ_2 + R_2.$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Exprimer le quotient et le reste dans la division euclidienne de $A(P_1 + \lambda P_2)$ par B en fonction de λ et des polynômes Q_1, Q_2, R_1 et R_2 en justifiant votre réponse. En déduire que φ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_n[X]$.

Partie II - Étude d'un premier exemple

Dans cette partie uniquement, on suppose que :

$$n = 2, \quad A = X^2 + 2X \quad \text{et} \quad B = X^3 + X^2 - X - 1.$$

3. Montrer que la matrice de l'endomorphisme φ de $\mathbb{C}_2[X]$ dans la base $(1, X, X^2)$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C}).$$

4. Etablir que $b = (X - 1, X^2 - 1, (X + 1)^2)$ est une base de $\mathbb{C}_2[X]$.
5. Donner la matrice de φ dans la base b . (Elle est très simple)
6. Justifier que M est semblable à une matrice diagonale que l'on précisera.

Partie III - Étude d'un second exemple

Dans cette partie uniquement, on suppose que $n = 2$ et que $B = X^3$. Comme A est un élément de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_2[X]$, il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tel que $A = \alpha + \beta X + \gamma X^2$.

7. Montrer que la matrice de l'endomorphisme φ de $\mathbb{C}_2[X]$ dans la base $(1, X, X^2)$ est :

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C}).$$

8. Montrer que T est semblable à une matrice scalaire (à préciser) si et seulement si le polynôme A est constant.

Partie IV - Étude du cas où B est scindé à racines simples

Dans cette partie, on ne suppose plus que $n = 2$: le nombre n est un entier quelconque de $\mathbb{N}^*$. Jusqu'à la fin de l'exercice, on suppose que B est un polynôme scindé à racines simples. On note $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ les racines de B qui sont donc des nombres complexes distincts.

On définit les polynômes de Lagrange $L_0, \dots, L_n \in \mathbb{C}_n[X]$ associés aux points $x_0, \dots, x_n$ par :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad L_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{X - x_i}{x_k - x_i}.$$

En particulier, les relations suivantes sont vérifiées :

$$\forall (k, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2, \quad L_k(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}.$$

IV.1 - Décomposition avec les polynômes de Lagrange

9. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Montrer que $x_0, \dots, x_n$ sont des racines du polynôme $P - \sum_{i=0}^n P(x_i)L_i$.
10. Dédire de la question précédente que pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on a $P = \sum_{i=0}^n P(x_i)L_i$.
11. Montrer que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

IV.2 - Propriétés de l'endomorphisme φ

Pour tout entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on désigne respectivement par $Q_k \in \mathbb{C}[X]$ et $R_k \in \mathbb{C}_n[X]$ le quotient et le reste dans la division euclidienne de AL_k par B .

12. Soit $(j, k) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$. Montrer que $R_k(x_j) = 0$ si $j \neq k$ et que $R_k(x_k) = A(x_k)$.
13. En utilisant ce qui précède, en déduire pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ que $\varphi(L_k) = A(x_k)L_k$.
14. En déduire la trace et le déterminant de φ .

Partie V - Étude d'un projecteur

On se donne B un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré $n + 1$ et on considère l'endomorphisme Ψ (cf partie I) de $\mathbb{C}[X]$ défini par : $\Psi(P)$ est le reste de la division euclidienne de P par B .

15. Prouver sans calcul que Ψ est un projecteur de $\mathbb{C}[X]$.
16. Déterminer noyau et image de ce projecteur.
17. Etablir que $\mathbb{C}[X] = \mathbb{C}_n[X] \oplus B\mathbb{C}[X]$.

Solution 6 1) Puisque B est de degré $n + 1$ tout reste dans une division par B est de degré $\leq n$. Ainsi ϕ est à valeurs dans $\mathbb{C}_n[X]$ ■

2) $A(P_1 + \lambda P_2) = B(Q_1 + \lambda Q_2) + (R_1 + \lambda R_2)$, comme le degré de $R_1 + \lambda R_2$ est inférieur ou égal à n , l'égalité précédente est la division euclidienne de $A(P_1 + \lambda P_2)$ par B ; ce qui signifie que $\phi(P_1 + \lambda P_2) = R_1 + \lambda R_2 = \phi(P_1) + \lambda \phi(P_2)$ d'où la linéarité de ϕ qui, avec 1), permet de dire que ϕ est endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$ ■

3) Calculs simples $\mathbb{C}_n[X]$ ■

4) $(b) = 3 = \dim(\mathbb{C}_2[X])$, il nous suffit de vérifier la liberté de b .

Donnons nous $(u, v, w) \in \mathbb{C}^3$ tel que $u(X - 1) + v(X^2 - 1) + w(X + 1)^2 = 0$.

En spécialisant en $1 : w = 0$, puis en $-1 : u = 0$. Ainsi $v = 0$ et b est bien une base de $\mathbb{C}_2[X]$ ■

5) Il vient sans peine :

$(X^2 + 2X)(X - 1) = (X + 1)^2(X - 1) - (X - 1)$ donc $\phi(X - 1) = -(X - 1)$ puis

$(X^2 + 2X)(X^2 - 1) = (X + 1)(X + 1)(X^2 - 1) - (X^2 - 1)$ donc $\phi(X^2 - 1) = -(X^2 - 1)$ et enfin

$(X^2 + 2X)(X + 1)^2 = (X + 3)(X + 1)(X^2 - 1) + 3(X + 1)^2$ donc $\phi((X + 1)^2) = 3(X + 1)^2$ et la matrice

désirée est $D = \text{diag}(-1, -1, 3)$ ■

6) M et D semblables car elles représentent ϕ ■

7) Evident. 8) Grâce au cours on doit savoir qu'une matrice scalaire n'est semblable qu'à elle même (grosse mytho) donc ici T sera semblable à une telle matrice ssi $\beta = \gamma = 0$ soit ssi A est un polynôme constant ■

9) Clair avec les évaluations données par l'énoncé. 10) $P - \sum_{i=0}^n P(x_i)L_i$ est de degré $\leq n$ et possède au moins

(par 9)) $n + 1$ racines; c'est donc le polynôme nul ■

11) 10) montre que cette famille engendre $\mathbb{C}_n[X]$ et, puisque de cardinal $n + 1 = \dim(\mathbb{C}_n[X])$, c'est une base de $\mathbb{C}_n[X]$ ■

12) Evident. 13) R_k étant de degré $\leq n$ et possédant n racines, à savoir les x_j pour $j \neq k$, on peut écrire $R_k = a \prod_{j \neq k} (X - x_j)$ mais avec l'évaluation en x_k de la question précédente et la définition de L_k , la réponse est immédiate ■

14) Trace et déterminant étant invariants de similitude, la question précédente montrant que la matrice de ϕ dans la base de Lagrange est $\text{diag}(A(x_0), \dots, A(x_n))$, il en résulte que:

$$\boxed{\text{tr}(\phi) = \sum_{k=0}^n A(x_k)} \quad \text{et} \quad \boxed{\det(\phi) = \prod_{k=0}^n A(x_k)} \quad \blacksquare$$

15) Résulte du fait que le reste dans la division par B d'un polynôme de degré $\leq n$ est le polynôme lui-même ■

16) Le noyau de Ψ est l'ensemble (c'est un sev de $\mathbb{C}[X]$) des polynômes divisibles par B ou multiples de B . Quant à l'image l'argument tenu en 15) prouve qu'il s'agit de $\mathbb{C}_n[X]$.

Puisque Ψ est un projecteur de $\mathbb{C}[X]$ son noyau et son image sont supplémentaires dans $\mathbb{C}[X]$ ■

Exercice 7

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$ espaces vectoriels de dimension finie.

On se donne $g \in L(E, G)$ et $f \in L(E, F)$.

1) Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :

i) $\exists h \in L(G, F), f = hg$

ii) $\text{Ker}(g) \subset \text{Ker}(f)$.

2) Soient $f_1, \dots, f_{k+1}$ $k+1$ formes linéaires de E , où $k \in \mathbb{N}$ et pour lesquelles nous posons $H_i = \text{Ker}(f_i)$.

Vérifier que les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $\bigcap_{i=1}^k H_i \subset H_{k+1}$

ii) $f_{k+1} \in \text{Vect}(f_1, \dots, f_k)$.

(On pourra considérer $x \in E \rightarrow (f_1(x), \dots, f_k(x))$).

Solution 7 1)i) $\Rightarrow$ ii) est immédiat.

Inversement considérons $(u_1, \dots, u_p)$ base de $\text{Ker} g$, complétée avec $v_1, \dots, v_r$ pour faire une base de E .

On sait alors que $g(v_1) = x_1, \dots, g(v_r) = x_r$ est une famille libre de G que l'on complète avec $x_{r+1}, \dots, x_m$ pour obtenir une base de G .

On définit enfin $h \in L(G, F)$ par :
$$h(x_i) = \begin{cases} f(v_i) & \text{si } 1 \leq i \leq r \\ 0_F & \text{si } r+1 \leq i \leq m. \end{cases} .$$

Dès lors $hog(u_i) = h(0_G) = 0_F = f(u_i)$ car $u_i \in \text{Ker} g \subset \text{Ker} f$, ce pour $1 \leq i \leq p$; si $1 \leq i \leq r$, $hog(v_i) = h(x_i) = f(v_i)$; ainsi f et hog sont égaux puisque éléments de $L(E, F)$ coïncidant sur une base de E ■

2) ii) $\Rightarrow$ i) ne pose pas de difficulté.

Inversement on applique le 1) avec $f = f_{k+1}$ et $g = (f_1, \dots, f_k)$, il existe donc $h \in L(\mathbb{K}^k, \mathbb{K})$ (une forme linéaire de $\mathbb{K}^k$ donc) telle que $f = hog$.

Considérons $(a_1, \dots, a_k)$ la matrice de h dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^k$ et $\mathbb{K}$ alors : $\forall x \in E, f_{k+1}(x) = \sum_{i=1}^k a_i f_i(x)$, ce qui est ii) ■

FIN