

Corrigé du TD2 bis : Polynômes

Exercice 24 (Tutorat pour l'exercice 10)

On se propose de caractériser les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$.

On note E leur ensemble et F celui des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ somme de deux carrés de polynômes de $\mathbb{R}[X]$.

a) Comparer simplement E et F .

b) Vérifier que F est stable par produit en observant que pour A, B, C, D de $\mathbb{R}[X]$:

$$(A^2 + B^2)(C^2 + D^2) = (AC + BD)^2 + (AD - BC)^2$$

c) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a^2 - 4b < 0$. Prouver que $X^2 + aX + b \in F$.

Soit P , non constant et dans E ; on désigne par $x_1, \dots, x_s$ les éventuelles racines réelles de P (s est leur nombre) et on pose $m_i = m_P(x_i)$, ce pour $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$. Enfin on désigne par $Q_1, \dots, Q_r$ ($r \in \mathbb{N}$) les facteurs irréductibles unitaires divisant P . Ainsi il existe des entiers naturels non nuls $p_1, \dots, p_r$ et un réel non nul a tels que :

$$P = a \prod_{i=1}^s (X - x_i)^{m_i} \prod_{i=1}^r Q_i^{p_i}$$

i) Etablir que $a > 0$.

ii) On suppose que $m_1 = 2t+1$ donc on peut écrire $P = (X - x_1)Q$, où $Q = a(X - x_1)^{2t} \prod_{i=2}^s (X - x_i)^{m_i} \prod_{i=1}^r Q_i^{p_i}$.

En constatant que Q est de signe constant au voisinage de x_1 , aboutir à une contradiction.

Ainsi, par l'absurde, tous les m_i sont pairs.

iii) En déduire, à l'aide de b), que $P \in F$ et donc que $E = F$

Exercice 25 (Localisation des racines)

1) Soient $p_1, \dots, p_n$ des réels positifs non tous nuls.

En utilisant les variations de la fonction $f : x > 0 \rightarrow 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{p_{n-i}}{x^{n-i}}$, montrer que le polynôme

$H = X^n - \sum_{i=0}^{n-1} p_{n-i} X^i$ possède une unique racine strictement positive, notée β .

Préciser en outre le signe de H sur les intervalles $]0, \beta[$ et $]\beta, +\infty[$.

2) Soient $a_1, \dots, a_n$ des nombres complexes non tous nuls et u une racine de $P = X^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} X^i$.

Considérons β la racine strictement positive de $H = X^n - \sum_{i=0}^{n-1} |a_{n-i}| X^i$, vérifier que $|u| \leq \beta$.

3) On garde le contexte de 2); par disjonction de cas prouver que $|u| \leq \max(1, \sum_{i=0}^{n-1} |a_{n-i}|)$.

4) On suppose de plus que tous les a_i sont non nuls et on pose $M = \max(2|a_1|, 2\frac{|a_2|}{|a_1|}, \dots, 2\frac{|a_{n-1}|}{|a_{n-2}|}, \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|})$.

Evaluer le signe de $H(M)$ et en déduire que $|u| \leq M$.

Solution :

1) La fonction f et le polynôme H (en vertu de la relation $x^n f(x) = H(x)$) pour $x > 0$ ont même signe et même condition d'annulation sur $\mathbb{R}_+^*$.

On voit aisément (par dérivation légitime) que f croît strictement sur $\mathbb{R}_+^*$, ce de $-\infty$ à 1.

Il en résulte que f donc H s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}_+^*$.

En tenant compte des données de l'énoncé : $H < 0$ sur $]0, \beta[$ et $H > 0$ sur $]\beta, \infty[$.

2) On note H le polynôme $X^n - \sum_{i=0}^{n-1} |a_{n-i}| X^i$; $P(u) = 0$ donne (via 1)) par inégalité triangulaire $H(u) \leq 0$

donc, par fin 1), $u \leq \beta$.

3) Supposons $|u| \geq 1$ alors de $P(u) = 0$ nous déduisons, toujours par inégalité triangulaire, que $|u|^n \leq \sum_{i=0}^{n-1} |a_{n-i}| |u|^i \leq \sum_{i=0}^{n-1} |a_{n-i}| |u|^{n-1}$, d'où le résultat.

4) Par définition de M nous avons $|a_1| \leq \frac{M}{2}$, $|a_2| \leq \frac{M}{2} |a_1| \leq \frac{M^2}{4}$ puis $|a_k| \leq \frac{M^k}{2^k}$ pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et enfin $|a_n| \leq M |a_{n-1}| \leq \frac{M^n}{2^{n-1}}$; dès lors $H(M) \geq M^n (1 - \frac{1}{2^{n-1}} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k}) = 0$. Le signe de H élucidé plus haut permet de conclure ■