
Corrigé partiel TD2 : Algèbre linéaire hors réduction

Pour favoriser les échanges intellectuels ne sont corrigés que les exercices non traités pour les deux groupes
L'exercice 21 sera corrigé dans le contexte de l'interpolation de Lagrange. Voir TD4.

Exercice 11 (Nilpotence)

E est un K ev de dimension $n \geq 2$ et f est un endomorphisme de E .

1) Soit $(x_1, \dots, x_k)$ une famille de E telle que $(f(x_1), \dots, f(x_k))$ soit libre.

Prouver que $(x_1, \dots, x_k)$ est libre aussi.

On note ω l'endomorphisme nul de E .

2) On suppose ici que $f^2 = f \circ f = \omega$.

Etablir une relation d'inclusion entre le noyau et l'image de f .

Donner, en utilisant un ev de polynôme pour E , un exemple de tel f qui soit différent de ω .

3) On suppose ici $\text{Im}(f) = \text{Ker}(f)$.

a) Montrer que $f \notin \text{GL}(E)$.

b) Vérifier que n est pair; on posera $n = 2p$.

Préciser la dimension du noyau de f .

Soit $(y_1, \dots, y_p)$ une base de $\text{Ker}(f)$.

c) Soit $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, justifier l'existence de $x_i \in E$ tel que $f(x_i) = y_i$.

d) Prouver que $b = (y_1, \dots, y_p, x_1, \dots, x_p)$ est une base de E et préciser la matrice de f dans cette base.

Exercice 12 (Endomorphisme de polynômes)

n est un entier naturel non nul et E désigne le $\mathbb{R}$ espace vectoriel $R_n[X]$ dont la base canonique est notée b .

On désigne par u l'application : $P \in E \rightarrow XP'' - 2P'$.

1) Vérifier que $u \in L(E)$.

2) Déterminer la matrice de u dans b .

3) Préciser le rang de u ainsi que son noyau.

4) Quelle est l'image de u ?

5) Pour les $5/2$: valeurs propres de u ? u est-il diagonalisable?

Exercice 13 (Baroque)

1) On considère ici $\mathbb{R}$ comme un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

Cet ev est-il de dimension finie? Si oui, préciser base et dimension.

La famille $(1, \sqrt{2})$ est-elle libre?

On rappelle que $\sqrt{2}$ est un irrationnel.

2) On considère ici $\mathbb{R}$ comme un $\mathbb{Q}$ espace vectoriel.

a) Prouver que la famille $(1, \sqrt{2})$ est libre.

b) Etudier la liberté de la famille $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$.

Exercice 14 (Centrale 2015 écrit partiel)

On note D l'opérateur de dérivation de $\mathbb{K}[X]$ et on considère F un sev de $\mathbb{K}[X]$, stable par D .

1) On suppose ici que F est de dimension finie ≥ 1 .

a) Prouver que $\{\deg(P), P \in F - \{0\}\}$ possède un plus grand élément, noté m .

On choisit $P \in F$ de degré m .

b) Etablir que $(P, D(P), \dots, D^m(P))$ est une famille libre de F .

c) En déduire que $F = \mathbb{K}_m[X]$.

2) F n'est pas de dimension finie désormais. En s'inspirant de la méthode précédente montrer que $F = \mathbb{K}[X]$.

3) Quels sont tous les sev de $\mathbb{K}[X]$ stables par D ?

Exercice 15 (Endomorphisme nilpotent d'indice maximal)

Ici $\dim(E) = n \geq 1$. On considère $f \in L(E)$ tel que $f^n = \omega$, où ω est l'endomorphisme nul de E . On suppose en outre que $f^{n-1} \neq \omega$.

- 1) Justifier l'existence d'un x de E tel que $f^{n-1}(x) \neq 0_E$.
- 2) Etablir que $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E , notée b .
- 3) Donner la matrice de f dans la base b . Préciser noyau et image de f .
- 4) En déduire que les matrices $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables

Exercice 16 (Matrices de trace nulle)

On pose :

- a) n entier naturel non nul.
- b) T est l'ensemble des éléments de $M_n(\mathbb{K})$ de trace nulle.
- c) $D = \text{diag}(1, 2, \dots, n)$.
- d) E $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie.

1) On se donne $f \in L(E)$ tel que : $(x, f(x))$ lié pour tout x de E (*)

En appliquant (*) aux éléments d'une base de E , montrer que f est une homothétie de E .

On se propose de montrer par récurrence sur n que tout élément de T est semblable à une matrice de diagonale nulle.

2)a) Initialiser.

b) On suppose la propriété à démontrer vraie au rang $n-1$ et on se donne $A \in T$.

i) Conclure si A est scalaire.

ii) On suppose ici que A n'est pas scalaire, établir que A est semblable à une matrice du type :

$$\begin{pmatrix} 0 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n \\ 1 & & & & \\ 0 & & (B) & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}$$

avec $a_2, \dots, a_n$ dans $\mathbb{K}$ et B dans $M_{n-1}(\mathbb{K})$. Conclure aussi.

3) En utilisant que $M \rightarrow MD - DM$, montrer que $(U, V) \rightarrow UV - VU$ réalise une surjection de $(M_n(\mathbb{K}))^2$ sur T .

4) Dans cette question $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $A \in T$; vérifier qu'il existe U, V, W de $M_n(\mathbb{C})$ telles que :

$A = UVW + jWUV + j^2VWU$. Proposer, sans démonstration, une généralisation.

Solution :

2) a)+b)i) Dans les deux cas A est scalaire : $A = \mu I_n \Rightarrow \text{tr}(A) = n\mu = 0$ soit $\mu = 0$ et $A = 0_n$ qui est, entre autre, à diagonale nulle.

b) ii) Puisque A n'est pas scalaire, θ l'endomorphisme canoniquement associé à A , n'est pas une homothétie de $\mathbb{K}^n$ donc par 0) (contraposée) il existe x de $\mathbb{K}^n$ tel que $(x, \theta(x))$ soit libre et si on complète cette dernière en une base de $\mathbb{K}^n$, la matrice de θ dans cette base possède une forme similaire à celle exigée par l'énoncé. Celle-ci se note M ; représentant θ dans une base, elle est bien semblable à A . Comme $0 = \text{tr}(A) = \text{tr}(M) = \text{tr}(B)$, on peut appliquer à B l'hypothèse de récurrence, à savoir $S = Q^{-1}BQ$ avec $Q \in GL_{n-1}(\mathbb{K})$ et S , matrice de même taille et à diagonale nulle. Considérons la matrice par blocs

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0: & (Q) \\ \vdots & \end{pmatrix} \text{ qui est inversible avec } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0: & (Q^{-1}) \\ \vdots & \end{pmatrix} \text{ puis effectuons le produit matriciel}$$

$$\text{par blocs } P^{-1}MP; \text{ ce qui donne } P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & (X) \\ 0: & (S) \\ \vdots & \end{pmatrix}.$$

Cette matrice étant semblable à M , elle l'est aussi à A et de trace nulle. Ainsi la propriété à vérifier s'en trouve héréditaire et, par récurrence, se valide pour tout entier naturel non nul.

2) $\ell : M \rightarrow MD - DM$ appartient à $L(M_n(\mathbb{K}))$ et son noyau est constitué des matrices commutant avec D . Or (m_{ij}) commute avec $D \Leftrightarrow jm_{ij} = im_{ij}$ pour $1 \leq i, j \leq n$. Ceci équivaut à dire que M est diagonale. Par

conséquent $\dim(Ker(\ell)) = n \Rightarrow$ (formule du rang) $rg(\ell) = n^2 - n$ or $Im(\ell)$ est, par le calcul précédent, inclus dans Z . Mais puisque $\dim Z = n^2 - n$, il vient que $Im(\ell) = Z$.

Considérons alors $X \in T$, grâce à 1): $\exists S \in Z, \exists P \in GL_n(\mathbb{K}), X = P^{-1}SP$ et, parce que $Im(\ell) = Z, \exists M \in M_n(\mathbb{K}), S = MD - DM$; il en résulte que $X = P^{-1}(MD - DM)P = P^{-1}MDP - P^{-1}DMP$, on pose alors $U = P^{-1}MP, V = P^{-1}DP$ et $X = UV - VU$, ce qui fournit la surjectivité souhaitée $\square$

3) $\frac{1}{j}A \in T$ et, par 2) il existe deux matrices W, V de $M_n(\mathbb{C})$ telles que : $\frac{1}{j}A = WV - VW \Rightarrow A = jWV + (1 + j^2)VW = UVW + jWUV + j^2VWU$, en prenant $U = I_n$. Une généralisation possible : posons $\tau = \exp(\frac{2i\pi}{m})$ où m entier ≥ 2 et $A \in T$; il existe alors m éléments de $M_n(\mathbb{C})$ $U_1, \dots, U_m$ tels que : $A = U_1 \dots U_m + \tau U_m U_1 \dots U_{m-1} + \dots + \tau^{m-1} U_2 \dots U_1$.

Exercice 17 Sachant que 204, 527 et 255 sont divisibles par 17, démontrer que

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 50 \end{vmatrix} \text{ est un entier}$$

divisible par 17.

Exercice 18 (Déterminant tridiagonal : CCINP)

On définit pour $n \geq 1$ la matrice $A_n = (a_{i,j})$ de $M_n(\mathbb{R})$ par $a_{i,i} = 2$ et $a_{i+1,i} = -1, a_{i-1,i} = -1$, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ pour lequel ces égalités ont du sens. On note Δ_n le déterminant de cette matrice.

a) Calculer Δ_1 et Δ_2 .

b) On suppose $n \geq 3$, en développant suivant la première colonne trouver une relation entre Δ_n, Δ_{n-1} et Δ_{n-2} . En déduire une expression de Δ_n en fonction de n .

c) A_n est-elle inversible? Si oui en déterminer la première colonne.

Exercice 19 Montrer que toute matrice carrée est somme de deux matrices inversibles.

Exercice 20 (ENS)

On note ϕ l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ qui à $M \in M_n(\mathbb{R})$ associe sa transposée.

Déterminer déterminant et trace de ϕ .

Exercice 21 (Mines MP 2009: déterminant de Cauchy)

On considère un entier $n > 0$ et deux suites finies $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$ et $(b_k)_{1 \leq k \leq n}$ de réels telles que $a_k + b_k \neq 0$ pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Pour tout entier m tel que $0 < m \leq n$, le déterminant de Cauchy d'ordre m est défini par :

$$D_m = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1 + b_1} & \frac{1}{a_1 + b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1 + b_m} \\ \frac{1}{a_2 + b_1} & \frac{1}{a_2 + b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2 + b_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_m + b_1} & \frac{1}{a_m + b_2} & \cdots & \frac{1}{a_m + b_m} \end{vmatrix}.$$

On définit la fraction rationnelle : $R(X) = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (X - a_k)}{\prod_{k=1}^n (X + b_k)}$.

1) Montrer que si $R(X)$ est de la forme $R(X) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{X + b_k}$, alors $A_n D_n = R(a_n) D_{n-1}$.

On pourra pour cela considérer le déterminant obtenu à partir de D_n en remplaçant la dernière colonne par

$$\begin{pmatrix} R(a_1) \\ R(a_2) \\ \vdots \\ R(a_n) \end{pmatrix}.$$

2) En déduire que : $D_n = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} (a_i + b_j)}$.

Exercice 22 (X)

Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, $P = aX + b$ et $Q = cX + d$.

On définit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ par $f(X^k) = P^k Q^{n-k}$, ce pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Déterminant et trace de f .

Solution : On ne s'occupe essentiellement que du déterminant. On note systématiquement en majuscule la matrice dans $(1, \dots, X^n)$ d'un endomorphisme de E noté lui avec la miniscule correspondante.

On pose $m = \frac{n(n+1)}{2}$. Commençons par des cas particuliers.

i) Le plus simple $c = 0$, F est triangulaire supérieure d'éléments diagonaux $a^k d^{n-k}$, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Il en

ressort que $\det(f) = (ad)^m$ et $\text{tr}(f) = \begin{cases} n+1 & \text{si } a = d \\ \frac{a^{n+1} - d^{n+1}}{a - d} & \text{sinon} \end{cases}$.

ii) $b = 0$, F est triangulaire inférieure d'éléments diagonaux $a^k d^{n-k}$, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Donc mêmes résultats que pour i).

iii) $a = 0$, tous les coefficients de F situés strictement sous la diagonale non principale sont nuls et celle-ci se constitue de $b^k c^{n-k}$, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$; ainsi en développant systématiquement suivant la première colonne, on trouve $\det(f) = (-bc)^m$. Même topo si $d = 0$. La trace n'a pas d'expression aussi remarquable et sera obtenue dans le cas général $\square$

Les cas particuliers mis en évidence en classe trouveront leur place dans la formule donnée pour le cas suivant $P = X + \alpha$ et $Q = X + \beta$, où on a posé $\alpha = \frac{b}{a}$ et $\beta = \frac{d}{c}$. Posons $g : P \in E \rightarrow P(X - \alpha)$ et $h = g \circ f$ alors $h(X^k) = X^k (X + \beta - \alpha)^{n-k}$ donc la matrice H est triangulaire inférieure et on a

$$\det(H) = \prod_{k=0}^n (\beta - \alpha)^{n-k} = (\beta - \alpha)^m.$$

G quant à elle est triangulaire supérieure et tous ses coefficients diagonaux valent 1 donc $\det(G) = 1$, comme $\det(H) = \det(G) \det(F)$, on a $\boxed{\det(f) = \det(F) = \det(H) = (\beta - \alpha)^m}$.

La formule générale s'obtient, par linéarité suivant chaque colonne du déterminant, en multipliant le résultat

précédent par $\prod_{k=0}^n a^k c^{n-k} = (ac)^n$ et donne $(ad - bc)^n$, formule dont la simplicité me laisse rêveur ■

Occupons nous enfin de la trace en posant, pour u réel, $s : P \in E \rightarrow P(X + u)$.

On sait (trace invariant de similitude) que la trace cherchée est aussi celle de $t = s^{-1} \circ f \circ s$; nous allons déterminer un u pour lequel le calcul de cette dernière soit moins fastidieux.

On a, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $t(X^k) = Q^{n-k}(X - u)(P(X - u) + uQ(X - u))^k = (cX + d - cu)^{n-k}((a + cu)X + b - au + u(d - cu))^k$.

En choisissant $u = \frac{-a}{c}$, on est ramené au cas particulier iii), pour lequel on avait renoncé au calcul de trace.

En localisant le coefficient du terme en X^k dans l'expression de $t(X^k)$ et, après simplification, on trouve

$$\sum_{k=0}^n \binom{n-k}{k} (a+d)^{n-2k} (ad-bc)^k \quad \blacksquare$$

Si on pose $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. On observe non sans plaisir que tout s'exprime à l'aide de la trace et du déterminant de la matrice A .

Exercice 23 (Circulez ! Centrale PSI)

On désire calculer pour $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, $\det(A)$ où $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$.

1) On note $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & (0) \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & (0) & & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, en calculant les puissances successives de cette matrice, vérifier que

$$A = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k.$$

Soient f l'endomorphisme canoniquement associé à J et, pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $x_k = (1, v^k, v^{2k}, \dots, v^{(n-1)k})$, où $v = \exp(\frac{2i\pi}{n})$.

2) Etablir que $b = (x_0, \dots, x_{n-1})$ est une base de $\mathbb{C}^n$.

3) Préciser D la matrice de f dans la base b .

4) P désignant la matrice de passage de la base canonique à la base b , vérifier que A et $\sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k$ sont semblables. En déduire $\det(A)$.