

Le sujet est constitué de 3 exercices indépendants.

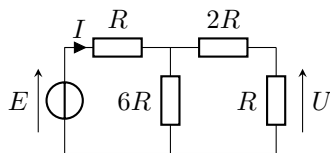
On veillera

- 1-à la rédaction des explications qui doivent être précises mais concises.**
- 2-à la bonne présentation de la copie et en particulier à l'orthographe .**
- 3-à mettre en évidence les résultats : les expressions littérales (homogénéité dimensionnelle à respecter) seront encadrées, ainsi que les résultats numériques (accompagnés d'unités).**
- 4-Les questions devront être numérotées clairement et séparées les unes des autres.**
- 5-Le sujet n'est pas à rendre avec la copie et doit être conservé par les étudiants.**
- 6-Les circuits électriques doivent être reproduits obligatoirement sur la copie.**

La non-observation de ces recommandations serait pénalisante.

EXERCICE 1 Calculs de courants et tension

On veut dans cet exercice calculer les courants I , I_1 parcourant la résistance $6R$ (à orienter sur le circuit), I_2 parcourant la résistance $2R$ (à orienter également) tels que $I+I_2=I_1$ ainsi que la tension U dans le circuit ci dessous par différentes méthodes et les comparer.



1-1ere méthode

- a-Représenter le circuit à 1 maille parcouru par le courant I et déterminer son expression.
- b-Appliquer alors le diviseur de courant pour déterminer les expressions de I_1 et I_2 .
- c-Vérifier alors la loi des nœuds.
- d-Déterminer l'expression de U

2-2eme méthode

- a-Déterminer l'expression de U en appliquant le diviseur de tension.
- b- En déduire I_1 , I_2 et I . Vérifier le bon accord avec la question 1

3- 3eme méthode

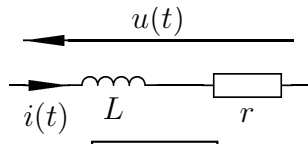
- a-Déterminer la tension U_1 (à orienter sur le circuit) aux bornes de la résistance $6R$, en utilisant la loi des nœuds en termes de potentiels, en fonction de E et de R .
- b- En déduire I_1 , I_2 et I . Vérifier le bon accord avec les questions précédentes.

AN : Calculer les trois courants et la tension U lorsque $E = 3 \text{ V}$ et $R = 1,5 \text{ k}\Omega$.

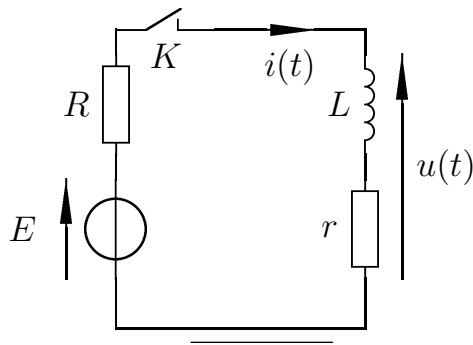
EXERCICE 2 : Circuits inductifs

Partie 1

On considère une bobine réelle d'inductance L et de résistance interne r non nulle. On la modélise par l'association série d'une bobine idéale d'inductance L avec un résistor de résistance r .



On utilise la bobine réelle précédente pour réaliser le circuit représenté ci dessous.



Un générateur de tension continue, réel de force électromotrice E , de résistance interne R , en série avec un interrupteur idéal K produit un échelon de tension : pour $t < 0$, K est ouvert, et on ferme K à $t = 0$.

Question préliminaire : 1-Proposer un protocole de mesure permettant d'obtenir la résistance interne R du générateur.

1- Établir l'équation différentielle vérifiée par l'intensité $i(t)$ dans le circuit pour $t > 0$.

2-Mettre cette équation sous la forme canonique et faire apparaître la constante de temps τ dont on donnera l'expression et la signification.

3- Déterminer l'expression de $i(t)$ en la justifiant soigneusement.

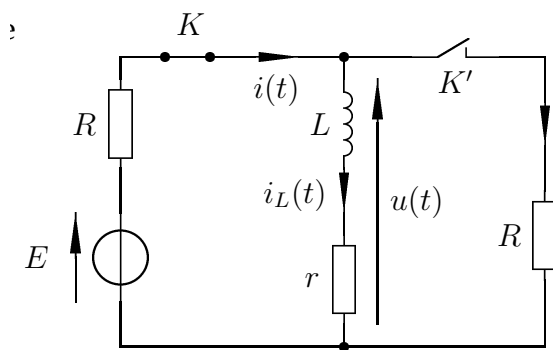
4- Tracer soigneusement $i(t)$ en précisant les échelles, la valeur à l'instant initial, celle en régime permanent et la tangente à l'origine.

- 5-a-Déterminer $u(0+)$ et la valeur de u en régime permanent.
 b-Déterminer l'expression de $u(t)$ la tension aux bornes de la bobine réelle à partir de $i(t)$ et vérifier les résultats de la question 5a

Partie2

On reprend le circuit précédent auquel on ajoute un résistor R en série avec un interrupteur idéal K' , le tout en parallèle avec la bobine réelle pour réaliser le circuit ci dessous. K est fermé depuis assez longtemps pour que le circuit ait atteint le régime permanent.

À l'instant $t = 0$, on ferme K' .



- 1-Déterminer $i_L(0+)$ et i_L en régime permanent.
- 2- Etablir l'équation différentielle à laquelle obéit $i_L(t)$ et la mettre sous forme canonique.
- 3-Etablir l'expression de $i_L(t)$ et représenter soigneusement $i_L(t)$

Exercice 3: mesure d'une capacité

On s'intéresse à la possibilité de déterminer la quantité d'eau tombée pendant un certain laps de temps appelé précipitation exprimée en mm ou cm (par m^2).

La mesure des précipitations sur un territoire est importante pour prévoir l'évolution du débit de ses cours d'eau, et gérer de manière optimale les ressources en eau. Le volume de précipitation est généralement mesuré à l'aide d'un réseau de pluviomètres répartis sur le territoire, qui déterminent localement la hauteur d'eau tombée au sol par unité de surface pendant un intervalle de temps donné. Parmi les différents types de pluviomètre qui existent, nous allons étudier dans cette partie le fonctionnement d'un pluviomètre capacitif, qui est basé sur la mesure d'une capacité électrique.

1. Étude du capteur capacitif

Le pluviomètre capacitif est modélisé par un condensateur constitué de deux armatures cylindriques coaxiales d'axe (Oz) et de hauteur H , comme représenté sur la figure ci-dessous.

- l'armature intérieure de rayon a_1 est au potentiel V_1 et possède une charge $Q > 0$ répartie sur sa surface ;
- l'armature extérieure de rayon a_2 est au potentiel V_2 et possède une charge $-Q$ répartie sur sa surface.

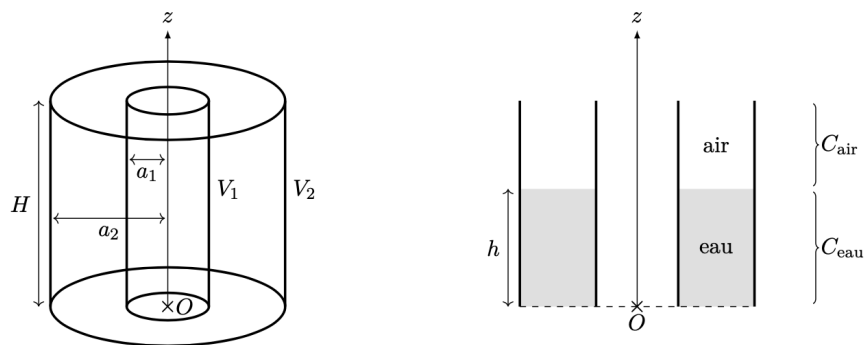


Figure 4: Pluviomètre capacitif en l'absence d'eau (à gauche), et sa vue de coupe en présence d'eau (à droite).

On donne la relation entre la tension $U = V_1 - V_2$ (avec $V_2 < V_1$) entre les armatures et la charge portée Q par les armatures en absence d'eau : $Q = \frac{2\pi\epsilon_0 H}{\ln(a_2/a_1)} U$ avec ϵ_0 la perméabilité diélectrique du vide.

1. En déduire l'expression de C_0 la capacité du condensateur en l'absence d'eau.

On étudie maintenant le pluviomètre en présence d'eau (figure ci-dessus à droite). Celui-ci étant posé verticalement sur le sol, il s'est rempli progressivement d'eau lorsque de la pluie est tombée dans l'espace entre les deux armatures cylindriques, et on note h la hauteur d'eau qu'il contient à la fin d'une averse. L'eau étant un milieu diélectrique qui est caractérisé par sa permittivité relative $\epsilon_r = 81$, et on peut montrer que l'expression du condensateur reste valable à condition de remplacer ϵ_0 par $\epsilon_0\epsilon_r$.

2. Justifier que la capacité du condensateur en présence d'eau peut s'exprimer comme la somme : $C = C_{eau} + C_{air}$ avec C_{eau} la capacité de la partie du condensateur contenant de l'eau, et C_{air} la capacité de la partie du condensateur contenant de l'air.

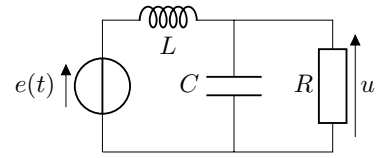
3. En déduire que la capacité du condensateur peut s'exprimer sous la forme : $C(h) = C_0(Ah + B)$

avec A et B des constantes que l'on exprimera en fonction de ϵ_r , ϵ_0 et H .
 Commenter les cas où $h = 0$ et $h = H$.

2. Détermination de h

Pour déterminer la valeur de h on propose d'incorporer le condensateur dans un circuit RLC soumis à un échelon de tension.

On considère donc le circuit RLC représenté sur la figure ci-contre où C est le condensateur lié au pluviomètre, L une inductance, R une résistance et $e(t)$ une source de tension pouvant prendre les valeurs 0 ou E . On suppose qu'à l'instant initial ($t = 0$), le condensateur est déchargé et aucun courant ne circule dans le circuit. A ce même instant, la source de tension passe de 0 à E .



1. Montrer qu'à partir de l'instant $t = 0$, la tension u satisfait l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 A$$

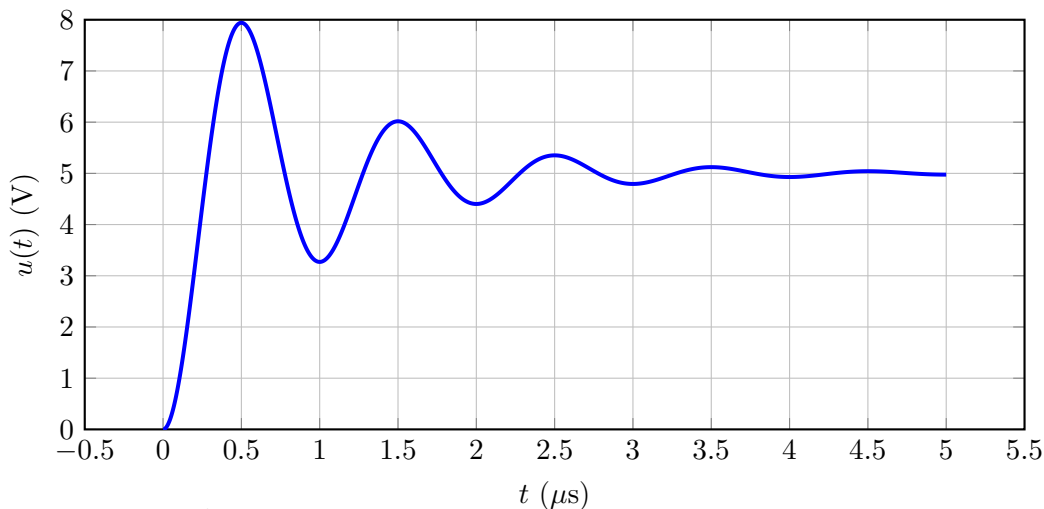
où ω_0 , Q et A sont des grandeurs à exprimer en fonction de L , C , R et E .

Rappeler le nom, la signification de ω_0 et Q et établir leurs dimensions d'après l'équation différentielle. Exprimer alors le coefficient d'amortissement λ en fonction des données.

2. Donner les conditions sur le facteur de qualité permettant d'observer les différents régimes (apériodique, critique, pseudo-périodique) et donner les solutions de l'équation homogène correspondantes (on ne cherchera pas à déterminer les constantes).

On s'intéresse à l'évolution de la tension aux bornes du condensateur après le passage de $e(t)$ de 0 à E avec les conditions initiales données précédemment.

Cette évolution est donnée sur la figure suivante:



3. Déterminer $u(0+)$ et $\frac{du}{dt}(0+)$. En déduire l'expression complète de $u(t)$

4. Rappeler la définition du décrément logarithmique δ et montrer que :

$$\delta = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$$

En utilisant la figure précédente, déterminer alors la période propre T_0 et Q .

5. Déterminer la hauteur d'eau h dans le pluviomètre ainsi que V le volume d'eau qu'il contient. Données : $H = 10$ cm, $a_1 = 1,0$ cm, $a_2 = 3,0$ cm, $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ F.m⁻¹ et $\varepsilon_r = 81$, $L = 0,54$ mH.

