

Devoir à la maison n° 1

CORRIGÉ

Exercice 1.

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Les entiers n et n^3 sont de même parité, donc $n^3 - n$ est pair.
Cette assertion est donc vraie.
- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors l'entier $m = n$ convient, puisque $n + m = 2n$ est pair.
Cette assertion est donc vraie.
- (c) Supposons l'existence d'un tel m . Posons $n = m + 1$. Alors $n + m = 2m + 1$ est impair, ce qui est contradictoire avec les propriétés de m . Donc m n'existe pas.
Cette assertion est donc fausse. Sa négation s'écrit :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n + m \text{ est impair.}$$

2. (a) La contraposée de (E) s'écrit : $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq 1 \text{ et } y \leq 1 \Rightarrow x + y \leq 2$.
- (b) Comme la contraposée de (E) est équivalente à (E) , il suffit de la démontrer :
Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On suppose que $x \leq 1$ et $y \leq 1$. Alors, par somme, $x + y \leq 2$.
L'assertion (E) est ainsi démontrée.
- (c) La réciproque de (E) s'écrit : $\forall x, y \in \mathbb{R}, x > 1 \text{ ou } y > 1 \Rightarrow x + y > 2$.
Posons $x = 2$ et $y = -57$. On a bien $x > 1$ ou $y > 1$, mais $x + y = -55 \leq 2$.
La réciproque de (E) est donc fausse.

Exercice 2.

1. L'assertion $P(N)$ s'écrit « $\sqrt{N} < N + 1$ ». Or :

$$\begin{aligned} P(N) &\Leftrightarrow N < (N + 1)^2 \quad \text{car } N + 1 \text{ est positif} \\ &\Leftrightarrow N < N^2 + 2N + 1 \\ &\Leftrightarrow 0 < N^2 + N + 1, \end{aligned}$$

où la dernière assertion est vraie car N^2 et N sont positifs. Donc, par équivalence, $P(N)$ est vrai.

2. Soit $n \in \llbracket 3, N \rrbracket$. Supposons $P(n)$. Montrons $P(n - 1)$.

Notons $A = \sqrt{n \sqrt{(n + 1) \sqrt{\cdots \sqrt{N}}}}$. On sait donc : $A < n + 1$, et on veut montrer : $\sqrt{(n - 1)A} < n$.

On a : $(n - 1)A < (n - 1)(n + 1) = n^2 - 1 < n^2$, d'où, par passage à la racine carrée (comme les deux membres sont positifs), l'inégalité voulue.

On a donc bien : $\forall n \in \llbracket 3, N \rrbracket, P(n) \Rightarrow P(n - 1)$.

3. On a montré :

$$\begin{cases} P(N) \\ \forall n \in \llbracket 3, N \rrbracket, P(n) \Rightarrow P(n - 1) \end{cases} .$$

D'après le principe de récurrence, on a donc : $\forall n \in \llbracket 2, N \rrbracket, P(n)$. En particulier, $P(2)$ est vrai.

On a donc bien montré l'inégalité voulue.