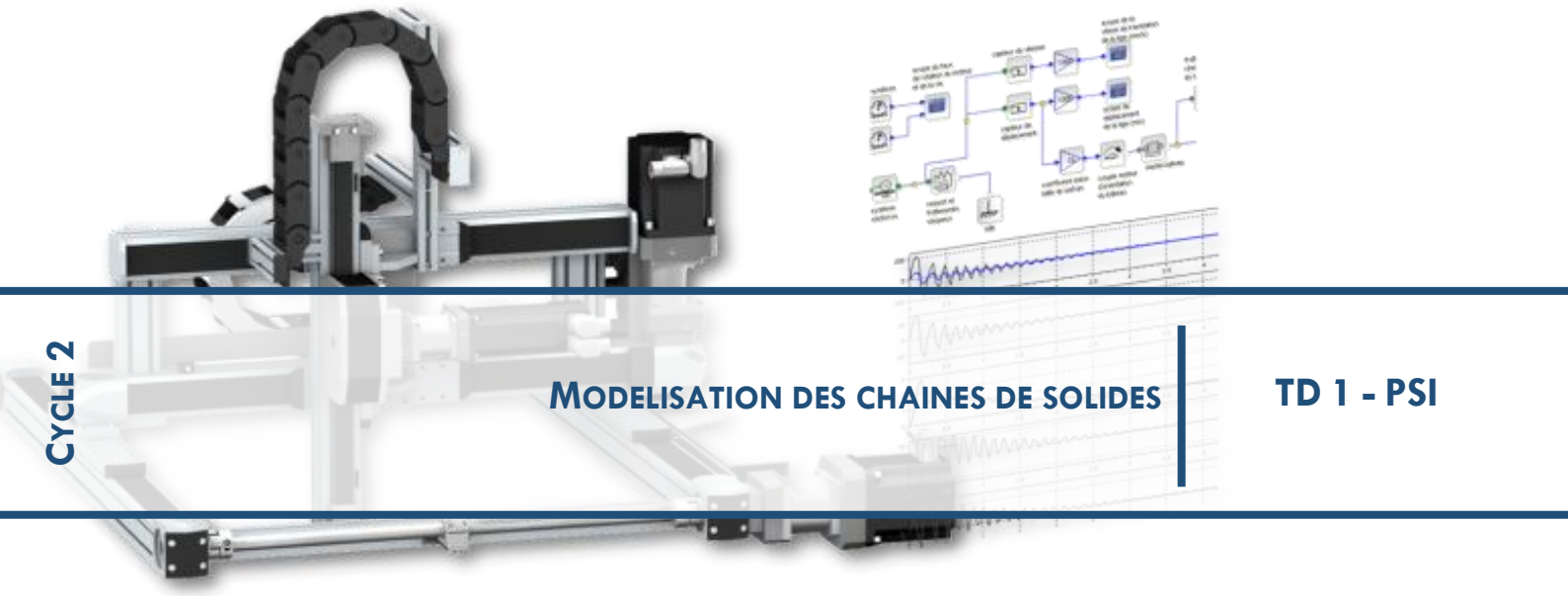


CYCLE 2

MODELISATION DES CHAINES DE SOLIDES

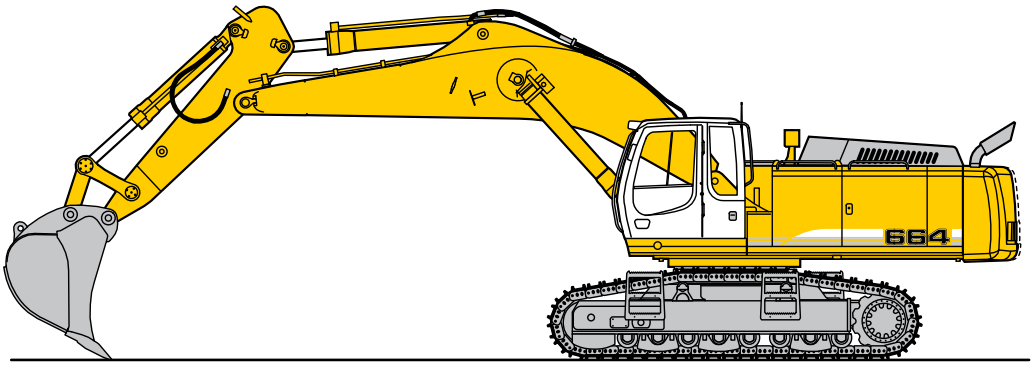
TD 1 - PSI

CHAPITRE 1

CINEMATIQUE ET STATIQUE DES CHAINES DE SOLIDES

1 EXERCICE 1: VERIN HYDRAULIQUE

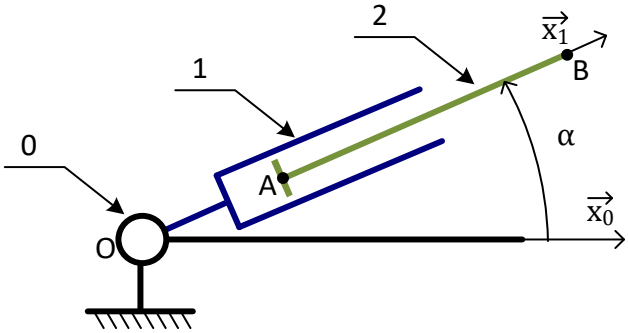
Le vérin hydraulique est un organe mécanique permettant de transformer une pression d'huile en énergie mécanique. Une pelleteuse de travaux publics est équipée d'un certain nombre de vérins indépendants permettant le mouvement du godet.



L'objectif de cette étude préliminaire est d'étudier le mouvement d'un vérin seul afin de déterminer les caractéristiques cinématiques nécessaires au dimensionnement du vérin (vitesse puis ultérieurement débits). On retiendra le paramétrage suivant du système :

Soit $\mathcal{R}_0(O,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$ le repère lié au bâti 0.

Soient $\mathcal{R}_1(O,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})$ et $\mathcal{R}_0(A,\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})$ 2 repères respectivement liés au corps de vérin 1 et à la tige 2.



Le vérin {corps 1 + tige 2} se déplace dans le plan $(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0})$.
Le corps 1 a un mouvement de rotation d'axe $(O, \overrightarrow{z_0})$ par rapport au bâti 0. On pose $\alpha = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1})$.
La tige 2 a un mouvement de translation rectiligne de direction $\overrightarrow{x_1}$ par rapport au corps 1. On pose :

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = (\lambda(t) + b).\overrightarrow{x_1}$$

1.1 1-Réaliser une figure plane illustrant le paramètre d'orientation. En déduire le vecteur vitesse de rotation instantanée du corps 1 par rapport au bâti 0. En déduire $\overrightarrow{\Omega(2/1)}$ et $\overrightarrow{\Omega(2/0)}$.

1.2 2- Déterminer $\overrightarrow{V(B \in 2/1)}$ par calcul direct.

1.3 3-Déterminer $\overrightarrow{V(B \in 2/0)}$ par calcul direct.

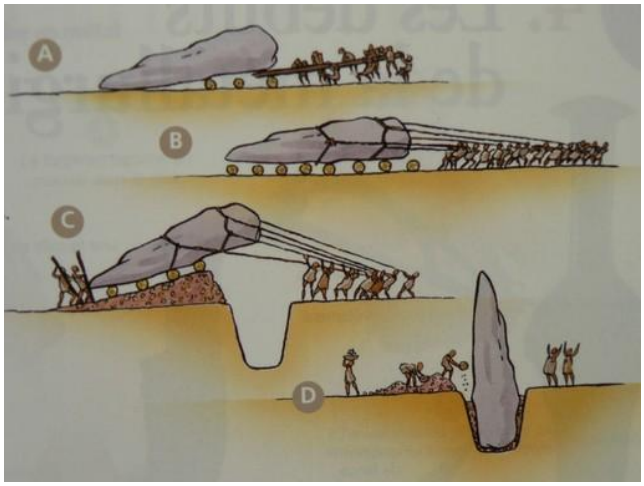
4-Exprimer le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ au point B.

1.4 5-Déterminer le vecteur accélération $\overrightarrow{\Gamma(B \in 2/0)}$

1.5 6-Déterminer les trajectoires $T(B \in 2/1)$, $T(B \in 1/0)$ et $T(B \in 2/0)$.

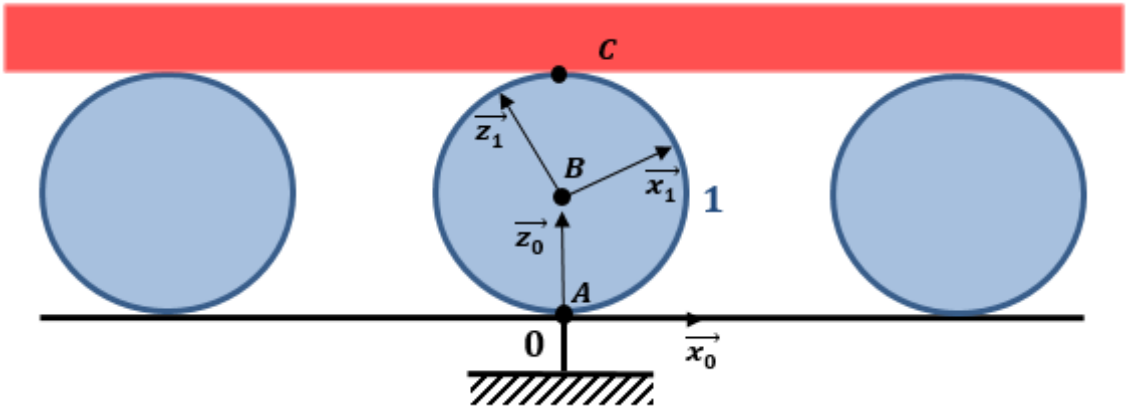
2 EXERCICE 2 : TRANSPORT DE MENHIRS

Le transport était (à priori) réalisé en utilisant des rondins de bois permettant de faire rouler le menhir sur ceux-ci dans le but de s'affranchir des frottements du menhir sur le sol. L'objectif de cet exercice est de valider le modèle de fonctionnement supposé.



On propose de s'intéresser au mouvement de l'un de ces rondins en supposant qu'au contact du rondin avec le sol d'une part et avec le menhir d'autre part, il y a roulement sans glissement.
On propose le modèle suivant :

$$\overrightarrow{AB} = R\overrightarrow{z_0}$$
$$\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_0$$
$$\theta_{10} = (\widehat{\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_0}}) = (\widehat{\overrightarrow{z_1}, \overrightarrow{z_0}})$$



On suppose $\Omega_{10} > 0$. Les rondins sont assimilés à des cylindres parfaits de rayons R et de diamètres $D = 30cm$.

1-En exploitant la propriété de roulement sans glissement en A, exprimer la vitesse $\vec{V}(B,1/0)$ en fonction de R, Ω_{10} et d'un vecteur donné

2-De même, exprimer $\vec{V}(C,1/0)$ en fonction de Ω_{10}, R et d'un vecteur donné

3-Dans quelle direction se déplace le menhir ?

4-En exploitant la propriété de roulement sans glissement en C, exprimer $\vec{V}(C,2/0)$ en fonction de Ω_{10}, R et d'un vecteur donné

La vitesse de déplacement des rondins sera assimilée à la vitesse de leur centre de gravité B, c'est-à-dire la vitesse de déplacement global « vu de loin » des rondins.

5-En déduire le rapport entre les vitesses de déplacement du rondin V_R et du menhir V_M

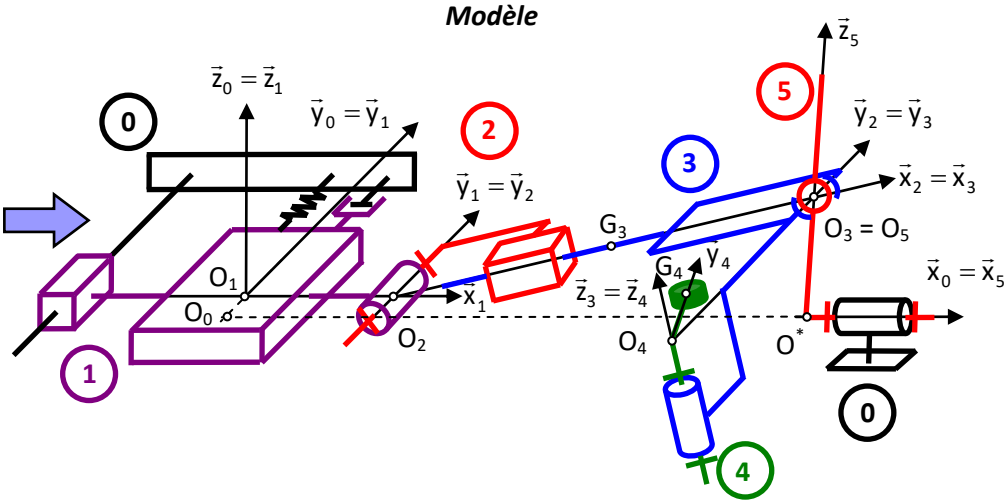
Remarque : au-delà de ce problème de rondins, cette étude s'étend aux roulements à billes et surtout, aux guidages linéaires à billes nécessitant une recirculation de celle-ci pour permettre des courses importantes.

3 EXERCICE 3 : VIBREUR D'OLIVIER

On s'intéresse à un automoteur vibreur d'oliviers, machine agricole destinée à la cueillette des olives dont on donne la modélisation lors d'une phase de vibration d'un olivier. Le dispositif a pour fonction de faire vibrer l'arbre par l'intermédiaire d'une pince mécanique qui enserre le tronc. Le vibreur est constitué de trois sous ensembles :

- le porteur, engin à deux roues motrices permettant le déplacement dans l'exploitation
- le bras télescopique à commande hydraulique qui ajuste la position de la pince autour de l'arbre
- une pince sur laquelle est monté un générateur de vibrations.

Réel ***Modèle***



- Le repère 0 correspond au sol, on associe le repère galiléen R_0 à 0 dont l'axe $(O_0, \vec{z}_0)$ est vertical ascendant.

- Le solide 1 correspond au tracteur porteur. On considère que dans la phase de vie étudiée le tracteur est en liaison glissière par rapport au sol suivant l'axe $(O_0, \vec{y}_0)$ et un système ressort + amortisseur visqueux modélise le comportement des pneus (ressort de raideur k_1 et amortissement visqueux de coefficient b_1). Le paramètre du mouvement est Y tel que $\overrightarrow{O_0O_1} = Y.\vec{y}_1$.
- Le solide 2 correspond au bras en liaison pivot d'axe $(O_2, \vec{y}_2)$ par rapport au solide 1. Le paramètre du mouvement est θ tel que $\theta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$. On définit $\overrightarrow{O_1O_2} = L_1.\vec{x}_1$.
- Le solide 3 correspond à la pince liée en liaison glissière avec le solide 2 suivant l'axe $(O_2, \vec{x}_2)$. Le paramètre du mouvement est X tel que $\overrightarrow{O_2G_3} = X.\vec{x}_2$. On définit $\overrightarrow{G_3O_3} = L_3.\vec{x}_2$ avec L_3 = cte.
- Le solide 4 correspond à un rotor qui porte un excentrique (balourd) qui génère les vibrations. Le balourd est lié au solide 3 par une liaison pivot d'axe $(O_4, \vec{z}_3)$ par rapport au solide 3. Le paramètre du mouvement est ϕ tel que $\phi = (\vec{y}_3, \vec{y}_4)$. On définit $\overrightarrow{O_3O_4} = -d.\vec{y}_2$ et $\overrightarrow{O_4G_4} = e.\vec{y}_4$.
- Le solide 5 correspond à l'arbre vibré. Lors de la phase de vie étudié, on considère que l'arbre est en liaison pivot d'axe $(O^*, \vec{x}_0)$ par rapport au sol et un système ressort + amortisseur visqueux modélise le comportement de l'ensemble tronc+racines (ressort de raideur k^* et amortissement visqueux de coefficient b^*). Le paramètre du mouvement est β tel que $\beta = (\vec{z}_0, \vec{z}_5)$. Enfin on considère que la liaison pince 3 tronc d'arbre est modélisée par un liaison rotule de centre O_3. On définit $\overrightarrow{O_0O^*} = d_0.\vec{x}_0$ et $\overrightarrow{O^*O_5} = L_5.\vec{z}_5$.

Hypothèses :

- Les liaisons sont toutes supposées parfaites sauf la liaison rotule entre 5 et 3 où l'on admet en supplément du torseur d'action mécanique transmissible la loi de comportement suivante : $\{T_{5\to3}\} = \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{R_{5\to3}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_{O_3(5\to3)}} = -\lambda.\overrightarrow{\Omega_{3/5}} \end{matrix}\right\}_{O_3}$.
- L'action mécanique exercée par le ressort et l'amortisseur entre 0 et 1 est modélisé par une force $\overrightarrow{F_{0\to1}} = (-k_1.Y - b_1.\dot{Y}).\vec{y}_0$.
- L'action mécanique exercée par le ressort et l'amortisseur entre 0 et 5 est modélisé par un couple $\overrightarrow{C_{0\to5}} = (-k^*.\beta - b^*.\dot{\beta}).\vec{x}_0$.
- Le rotor est entrainé par un moteur hydraulique qui exerce un couple $\overrightarrow{C_{3\to4}} = C_m.\vec{z}_4$ et qui assure un vitesse de rotation uniforme $\dot{\phi} = \Omega = \text{cte}$.
- On néglige l'action mécanique de la pesanteur par rapport aux autres actions mécaniques mises en jeu.

Données massiques :

- S_1 : Solide de masse m_1 et de centre de gravité O_1.
- S_2 : Solide de masse m_2 et de centre de gravité O_2. $I_{O_2}(S_2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{(b2)}$
- S_3 : Solide de masse m_3 et de centre de gravité G_3. $I_{G_3}(S_3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{(b2)}$
- S_4 : Solide de masse m_4 et de centre de gravité G_4. $I_{G_4}(S_4) = \begin{pmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{pmatrix}_{(b4)}$

- S_5 : Solide de masse m_5 et de centre de gravité O_5. $I_{O*}(S_5) = \begin{pmatrix} A_5 & 0 & 0 \\ 0 & B_5 & 0 \\ 0 & 0 & C_5 \end{pmatrix}_{(b5)}$

Q.1. Réaliser le graphe d'analyse du système.

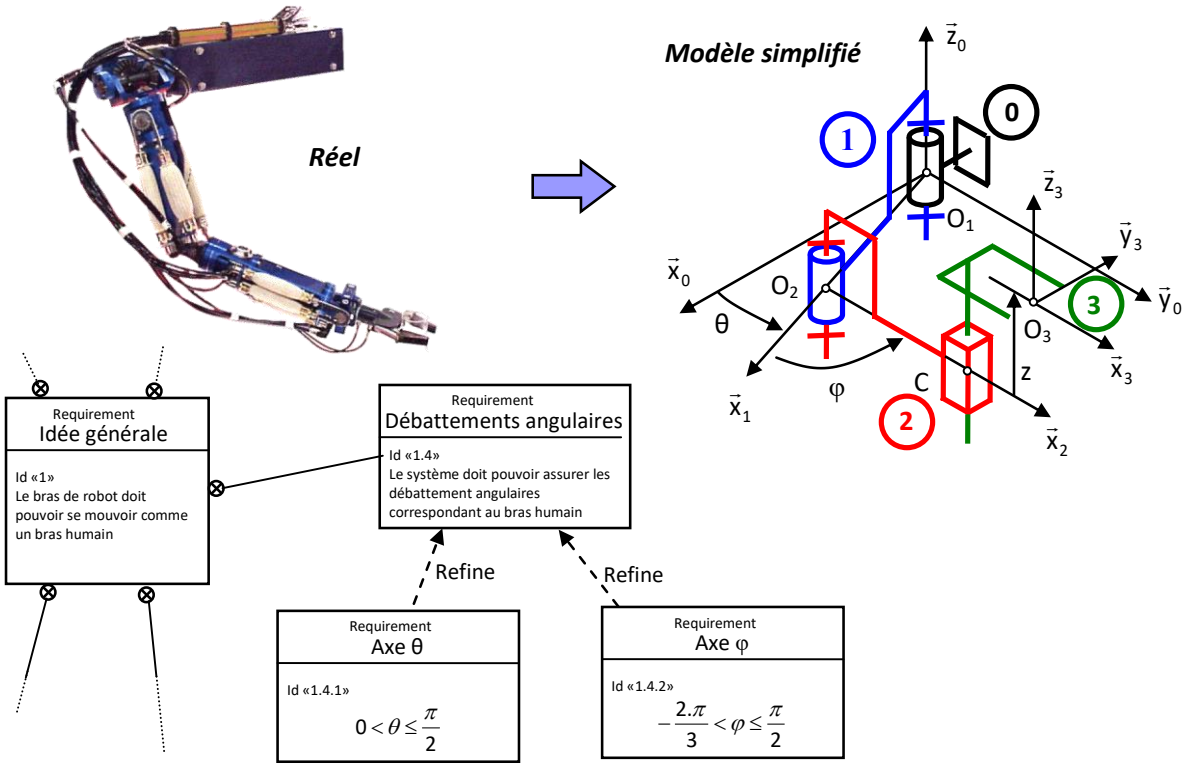
Q.2. Ecrire les relations entre les paramètres géométriques du système en utilisant la fermeture géométrique $\overrightarrow{O_0O^*} + \overrightarrow{O^*O_5} = \overrightarrow{O_0O_5}$ projetée sur les trois axes de la base 0.

Q.3. Linéariser les équations obtenues en supposant les paramètres θ et β petits.
Etablir ensuite la relation $Y = -L_5.\beta$.

Q.4. Montrer que le torseur d'action mécanique de 5→3 est de la forme $\{F_{5\to3}\} = \begin{Bmatrix} X_{53} & \lambda.\dot{\beta}.\cos\theta \\ Y_{53} & 0 \\ Z_{53} & \lambda.\dot{\beta}.\sin\theta \end{Bmatrix}_{O_3\,(b2)}$.

4 EXERCICE 4 : BRAS DE ROBOT A MUSCLES ARTIFICIELS

On s'intéresse à un bras de robot à muscles artificiels dont on donne une description structurelle ainsi qu'une modélisation cinématique et un extrait partiel de cahier des charges fonctionnel. Pour s'approcher du comportement humain, le manipulateur est conçu à partir d'une structure anthropomorphique à 7 degrés de liberté activés par des paires de muscles artificiels montés en opposition et utilisant l'énergie pneumatique.



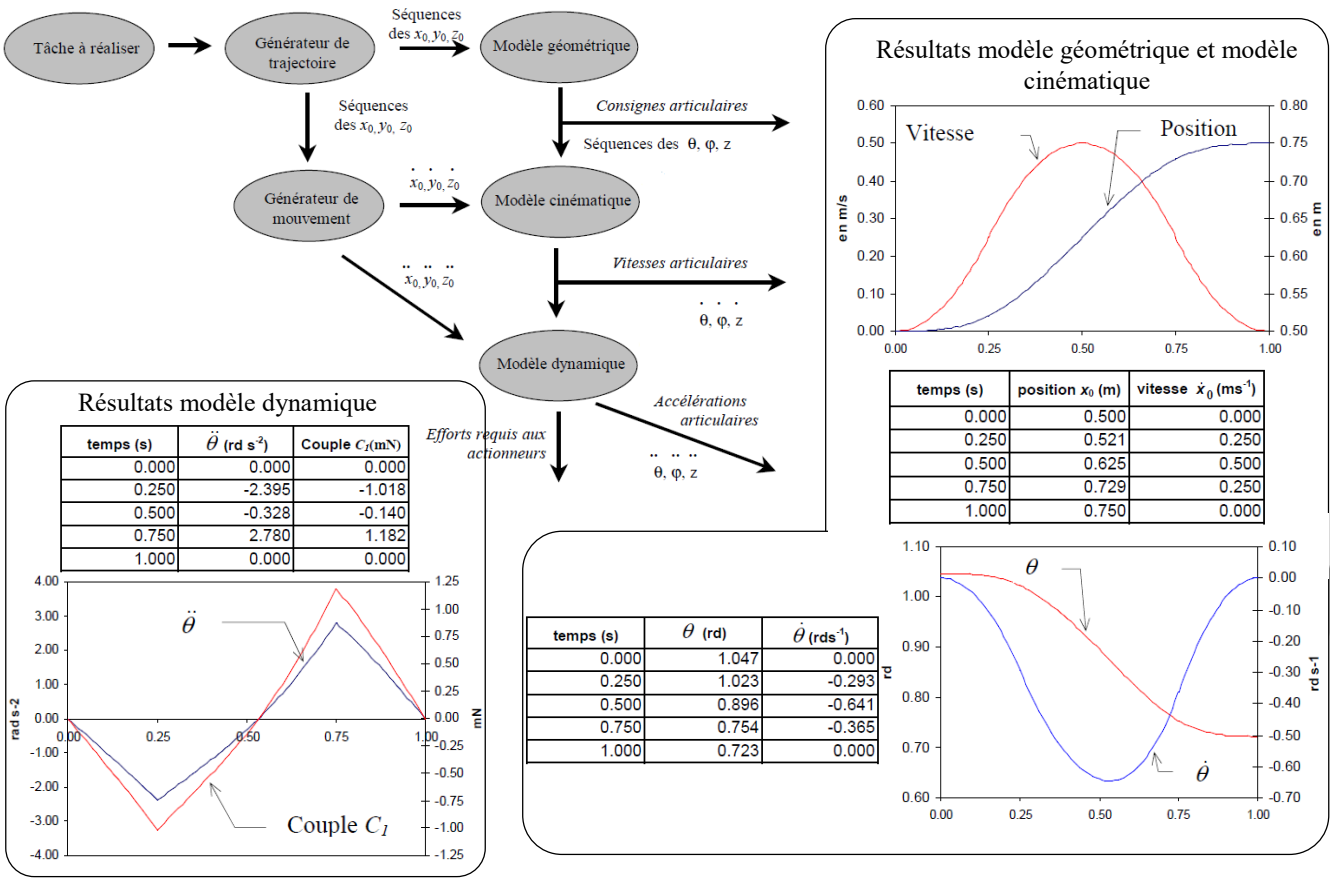
L'organisation des calculs à effectuer pour dimensionner ou pour piloter le manipulateur peut être décomposée suivant le graphe figure 1.

Dans un premier temps, la trajectoire est définie dans l'espace opérationnel (repère $(O_1, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié à la base du robot). Le mouvement sur la trajectoire est alors élaboré de façon à obtenir une évolution régulière entre le point de départ et le point d'arrivée. Cet objectif est réalisé en adoptant un profil d'accélération trapézoïdal.

Le calcul du modèle géométrique permet ensuite de lier les coordonnées articulaires (espace des positions relatives des corps du manipulateur) aux coordonnées opérationnelles, en fonction de la trajectoire opérationnelle adoptée. Ce calcul fournit les consignes de position articulaires à émettre vers les moteurs. Il donne également les débattements requis pour chaque articulation.

Le modèle cinématique qui lie les vitesses articulaires aux vitesses opérationnelles et aux positions articulaires permet d'élaborer les vitesses articulaires « objectif » qui peuvent être utilisées pour le dimensionnement des moteurs ou comme signal d'anticipation pour leur commande.

Le modèle dynamique qui lie les accélérations articulaires aux accélérations opérationnelles ainsi qu'aux vitesses et positions articulaires permet de déterminer les couples à fournir par les moteurs pour réaliser le mouvement désiré. Ces calculs permettent de dimensionner les moteurs ou de procéder à une anticipation lors de leur commande.



temps (s)	$\ddot{\theta}$ (rd s^{-2})	Couple C_1(mN)
0.000	0.000	0.000
0.250	-2.395	-1.018
0.500	-0.328	-0.140
0.750	2.780	1.182
1.000	0.000	0.000

temps (s)	position x_0 (m)	vitesse $\dot{x}_0$ (ms^{-1})
0.000	0.500	0.000
0.250	0.521	0.250
0.500	0.625	0.500
0.750	0.729	0.250
1.000	0.750	0.000

temps (s)	θ (rd)	$\dot{\theta}$ (rds^{-1})
0.000	1.047	0.000
0.250	1.023	-0.293
0.500	0.896	-0.641
0.750	0.754	-0.365
1.000	0.723	0.000

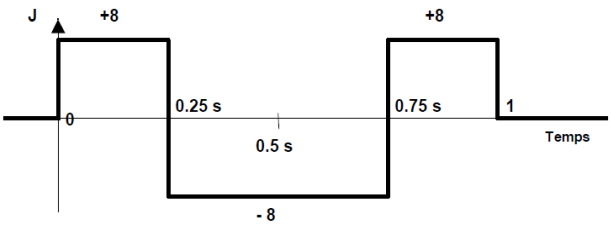
Figure 1

Générateur de trajectoire

Le générateur de trajectoire du manipulateur est chargé d'élaborer la stratégie de ralliement d'un point à partir d'un autre point. La trajectoire opérationnelle est paramétrée par l'abscisse curviligne s. Lorsque le mouvement sur cette trajectoire est fixé par une succession d'accélérations constantes, les efforts que doivent développer les moteurs pour vaincre les effets inertiels présentent également des discontinuités

importantes qui excitent les dynamiques naturelles du manipulateur. C'est pourquoi, on adopte un profil d'accélération continu à l'ordre 0. La dérivée par rapport au temps $\dot{\gamma}$ de l'accélération, appelée jerk et notée J, varie alors en forme de créneaux. La valeur du jerk est de 8 m.s^{-3} pour réaliser un déplacement de s_0 = 0,5 m à s_1 = 0,75 m en un temps de parcours objectif de 1 s.

Q.1. A l'aide de la figure ci-contre, tracer qualitativement l'évolution de l'accélération en fonction du temps avec γ_0 = 0 à l'instant initial t_0 = 0 s. Calculer les valeurs extrémales de l'accélération sur la trajectoire au cours du mouvement.



Pour simplifier l'étude, on se limite à une étude avec 3 axes sur le manipulateur. La configuration du manipulateur est donc fixée par les trois coordonnées articulaires θ, ϕ et z qui fixent la position du repère $R_3(O_3,\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_3)$ lié à l'organe terminal, par rapport au repère $R_0(O_1,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ lié à la base du manipulateur. Le vecteur position du point O_3 est défini dans l'espace opérationnel par ses coordonnées dans le repère R_0 telles que : $\overrightarrow{O_1O_3} = x_0.\vec{x}_0 + y_0.\vec{y}_0 + z_0.\vec{z}_0$. L'accélération de la pesanteur $\vec{g}$ est telle que $\vec{g} = -g.\vec{z}_0$ et le repère $R_0(O_1,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ sera considéré comme galiléen. L'optimisation du volume atteignable par l'organe terminal a conduit à adopter les longueurs projetées dans le plan $(O_1,\vec{x}_0,\vec{y}_0)$ avec $O_1O_2 = O_2O_3 = L$

Le manipulateur est constitué :

- du bras 1 avec son équipement, de centre d'inertie G_1 tel que $\overrightarrow{O_1G_1} = \frac{L}{2}.\vec{x}_1$, de masse m, de longueur L, d'inertie I par rapport à l'axe (G_1, $\vec{z}_0$) considéré comme un axe principal d'inertie, en liaison pivot sans frottement par rapport à la base fixe du manipulateur, d'axe (O_1, $\vec{z}_0$) caractérisé par l'angle θ, soumis à un couple $C_1.\vec{z}_0$ par l'intermédiaire d'un moteur dont le corps est solidaire du bâti 0.
- De l'avant-bras 2 avec son équipement, de centre d'inertie G_2 tel que $\overrightarrow{O_2G_2} = \frac{L}{2}.\vec{x}_2$, de masse m, de longueur L , d'inertie I par rapport à l'axe (G_2, $\vec{z}_0$) considéré comme un axe principal d'inertie, en liaison pivot sans frottement par rapport à la base fixe du manipulateur, d'axe (O_2, $\vec{z}_0$) caractérisé par l'angle θ, soumis à un couple $C_{12}.\vec{z}_0$ par l'intermédiaire d'un moteur dont le corps est solidaire du bras 1.
- Du poignet 3, caractérisé par son centre O_3, de masse négligeable et tel que $\overrightarrow{CO_3} = r.\vec{x}_3 + z.\vec{z}_0$, en liaison glissière sans frottement par rapport à l'avant-bras 2, d'axe (C, $\vec{z}_0$) caractérisé par l'altitude z du centre de la pince O_3.

Q.2. Réaliser le graphe d'analyse du système.

Q.3. Soit $\overrightarrow{O_1O_3} = x_0.\vec{x}_0 + y_0.\vec{y}_0 + z_0.\vec{z}_0$. Etablir le modèle géométrique direct du manipulateur, c'est-à-dire la relation donnant les coordonnées opérationnelles x_0, y_0 et z_0 en fonction des coordonnées articulaires θ, ϕ et z.

Q.4. Déterminer le modèle géométrique inverse du manipulateur, c'est-à-dire la relation donnant les coordonnées articulaires θ, ϕ et z en fonction des coordonnées opérationnelles x_0, y_0 et z_0.

Q.5. En déduire les équations du modèle géométrique inverse si le point O_3 suit exactement une trajectoire rectiligne suivant l'axe $(O_1, \vec{x}_0)$. Construire un schéma permettant de vérifier graphiquement les expressions. Définir alors la course des moteurs (domaine de variation des angles θ et ϕ) dans le cas où $L < O_1O_3 < 1{,}5.L$ et conclure vis-à-vis du cahier des charges.

Le robot étudié a une longueur de bras L = 0,5 m. On se place dans la configuration de fonctionnement définie question 5, où le centre de la pince O_3 suit toujours exactement une trajectoire rectiligne suivant l'axe $(O_1, \vec{x}_0)$ telle que, à t = 0 s, O_1O_3 = 0,5 m et à t = 1 s, O_1O_3 = 0,75 m avec une loi du mouvement correspondant à celle définie question1.

Q.6. Dériver simplement les équations du modèle géométrique inverse obtenu question 5 et déterminer les vitesses articulaires $\dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{z}$ en fonction des grandeurs opérationnelles $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$, de la grandeur déjà calculée θ et de la longueur L.

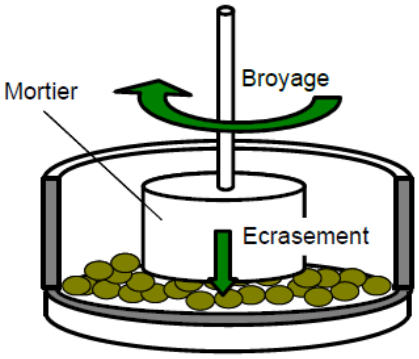
Q.7. Vérifier les résultats à l'aide de des courbes données figure 1, à l'instant t = 0,75 s et indiquer les valeurs numériques des différentes grandeurs articulaires obtenues.

5 EXERCICE 5 : BROYEUR A MORTIER

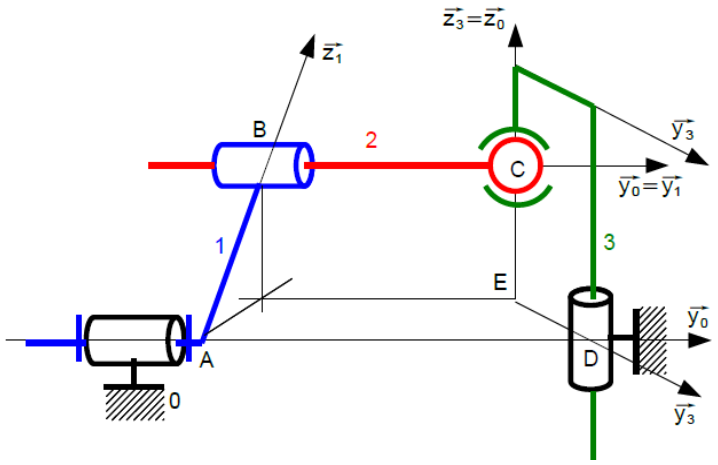
On s'intéresse à un broyeur à mortier dont on donne une description structurelle ainsi qu'un extrait de cahier des charges fonctionnel. La fonction principale de ce système est de réduire en poudre des matériaux dur et cassant (levures, charbon, clinker, sels, substances homéopathiques, ...).

Exigences	Critères	Niveaux
…	…	…
1.1 Le système doit réduire en poudre des granulats de matériaux	Taille initiale granulat Taille finale granulat Effort écrasement minimal	Diamètre 8 mm Diamètre 0,001 mm 5 N mini
…	…	…

Pour réduire en poudre les matériaux, on utilise un mortier (pièce cylindrique) qui effectue un mouvement combiné de rotation et de translation, afin de broyer et d'écraser les agglomérats de matériaux.



On donne ci-dessous le modèle cinématique du mécanisme permettant la mise en mouvement du mortier 3 :



Un motoréducteur (non représenté ici) entraîne le volant 1 en rotation autour de l'axe (A,$\vec{y}_0$). Le déplacement de la bielle 2 provoque la rotation et la translation simultanées du mortier 3 par rapport au bâti 0
réalisant ainsi la réduction en poudre correcte du produit.

Données :

$\overrightarrow{AB} = R.\vec{z}_1$, $\overrightarrow{BC} = \lambda(t).\vec{y}_1$, $\overrightarrow{AD} = d.\vec{y}_1$, $\overrightarrow{EC} = h(t).\vec{z}_0$, $\overrightarrow{ED} = L.\vec{y}_3$

Les dimensions géométriques sont les suivantes : R = 3 cm, d = 7 cm, L = 4 cm.

On pose :

$R_0(A,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ *le repère lié au bâti 0.*

$R_1(A,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ *le repère lié au volant 1 tel que* $\theta_{10} = (\vec{x}_0,\vec{x}_1)$

$R_2(B,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$ *le repère lié à la bielle 2 tel que* $\theta_{21} = (\vec{x}_1,\vec{x}_2)$

$R_3(C,\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_3)$ *le repère lié à la bielle 2 tel que* $\theta_{30} = (\vec{x}_0,\vec{x}_3)$

Q.1. Réaliser le graphe des liaisons du système. Et mettre en place les 3 figures géométrales

L'action mécanique exercée par le motoréducteur sur le rotor est modélisée par $\{F_{M\to1}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_m\vec{y_0} \end{Bmatrix}$. *Les actions mécaniques exercées par le matériau à écraser sur le mortier 3 sont modélisables par le torseur suivant :* $\{F_{P\to3}\} = \begin{Bmatrix} Z_p\,\vec{z_0} \\ N_p\,\vec{z_0} \end{Bmatrix}$.

On néglige l'action mécanique de la pesanteur devant les autres actions mécaniques et on considère que toutes les liaisons entre les solides sont parfaites. Le repère R_0 est considéré comme galiléen.

Par la suite, on notera $\{F_{i\to j}\} = {}_P\begin{Bmatrix} X_{ij} & L_{ij} \\ Y_{ij} & M_{ij} \\ Z_{ij} & N_{ij} \end{Bmatrix}_{B_0}$ *le torseur d'action mécanique transmissible du solide i sur le solide j en un point P quelconque et dans la base 0.*

Q.2. Donner les torseurs d'action mécanique transmissible

- de la liaison 0-1 noté$\{F_{0\to1}\}$ en A et dans la base 0.

- de la liaison 2-1 noté$\{F_{2\to1}\}$ en B et dans la base 0.

- de la liaison 3-2 noté$\{F_{3\to2}\}$ en C et dans la base 0.

- de la liaison 0-3 noté$\{F_{0\to3}\}$ en D et dans la base 0.

Q.3. Par application du théorème du moment statique appliqué au solide 1, au point A et en projection sur l'axe $\vec{y}_0$, déterminer la relation liant R, X_{21}, Z_{21}, C_m et θ_{10}.

Q.4. Par application du théorème de la résultante appliqué au solide 2, déterminer les relations liant Z_{21}, Z_{32}, X_{21} et X_{32}. Démontrer que $Y_{32} = 0$.

Q.5. Par application du principe fondamental de la statique au solide 3 au point D, déterminer les relations liant Z_P, Z_{32} et L, X_{32}, N_P et θ_{30}.

Q.6. A partir des résultats obtenus questions précédentes, déterminer la loi entrée statique du système liant C_m en fonction de L, R, N_P, Z_P, θ_{30} et θ_{10}.

Les caractéristiques du moteur sont les suivantes :

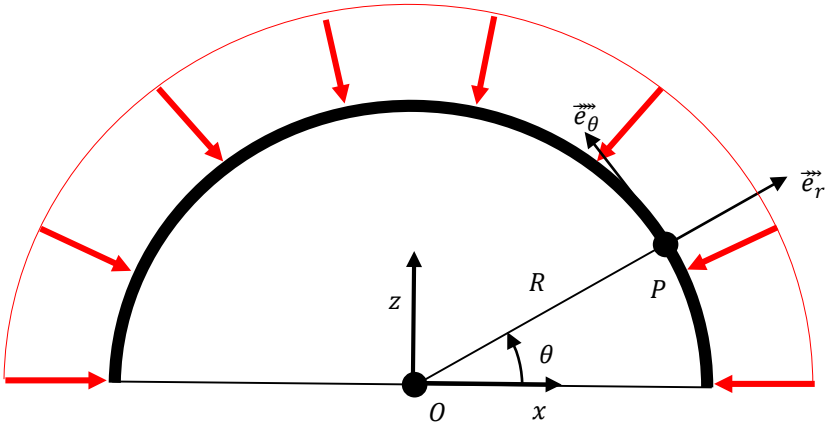
	Puissance nominale (W)	Vitesse nominale (tr/min)	Couple nominal (N.m)	Inertie (kg.m2)	Poids (kg)
Moteur P30B04005DX	50	3000	0,16	$0{,}03 \times 10^{-4}$	0,35

Q.7. En considérant le couple de broyage nul, déterminer l'effort d'écrasement minimal que peut obtenir avec le broyeur. Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

6 EXERCICE 6 : RESTAURANT SOUS-MARIN

Le Rangali Island Restaurant est un restaurant dans les Maldives proposant une salle sous-marine.

Dans le but de dimensionner la structure supportant la baie vitrée, nous souhaitons déterminer le torseur de l'action de l'eau sur celles-ci. On suppose que les baies vitrées ont une structure cylindrique de rayon constant R et on propose le modèle suivant, pour une tranche d'épaisseur dy :



Nous négligerons la variation de pression entre le haut et le bas des baies vitrées et supposerons qu'elle est constante $p = p_0 + \rho g h$ où ρ est la masse volumique de l'eau, g l'accélération de la pesanteur, h la profondeur et p_0 la pression atmosphérique.

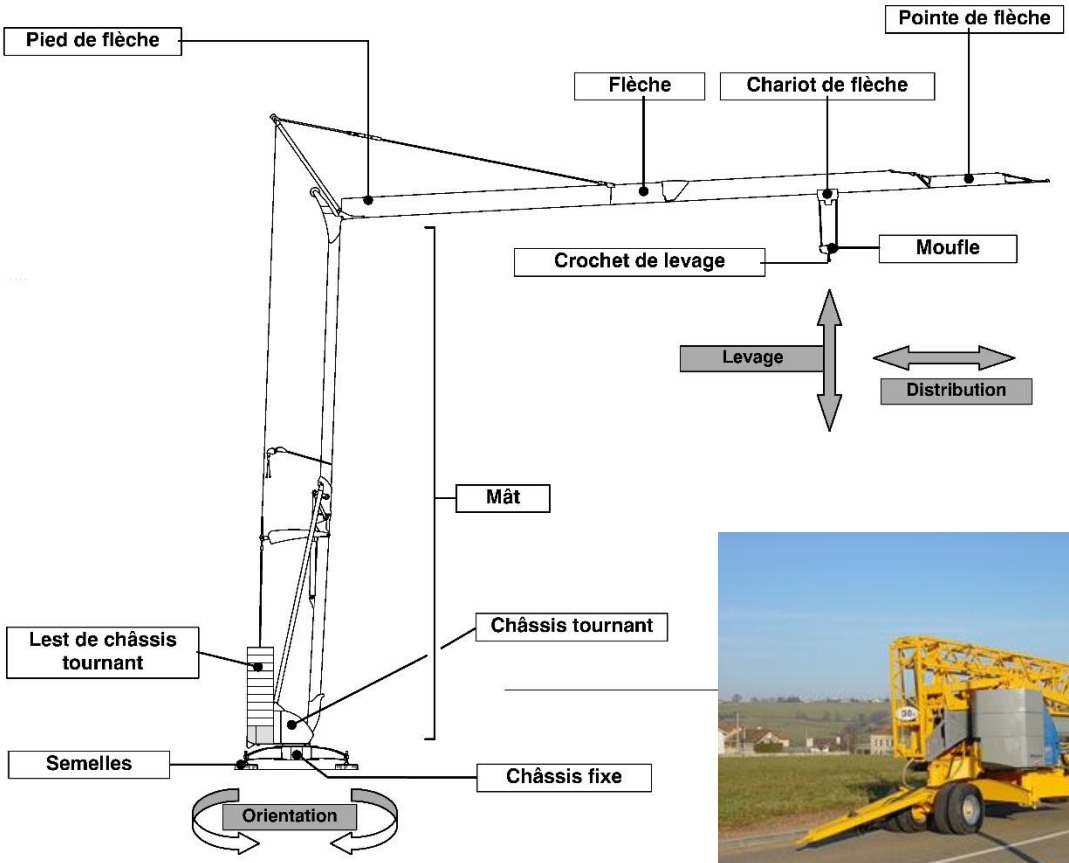
$$\rho = 1000\ kg.m^{-3} \quad ; \quad g = 9{,}81\ m.s^{-2} \quad ; \quad h = 10m \quad ; \quad p_0 = 101325\ Pa$$
$$R = 2{,}5\ m \quad ; \quad L = 15\ m$$

Appelons L la longueur de la structure.

1- Déterminer le torseur $\{dT\}$ de l'action de l'eau sur la structure en O dans la tranche de longueur dy
2- En déduire un modèle simple de l'action de l'eau sur la structure hémicylindrique. Effectuer l'application numérique.

7 EXERCICE 7 : GRUE POTAIN

Conçue pour la construction de maisons individuelles, de bâtiments industriels, de logements collectifs jusqu'à trois ou quatre étages et de petits ponts, la Grue à Montage Automatisée est un produit très prisé par les petites entreprises de bâtiment et de travaux publics. Elle se monte sur le chantier de façon autonome en une trentaine de minutes grâce, notamment, à sa technologie hydraulique.



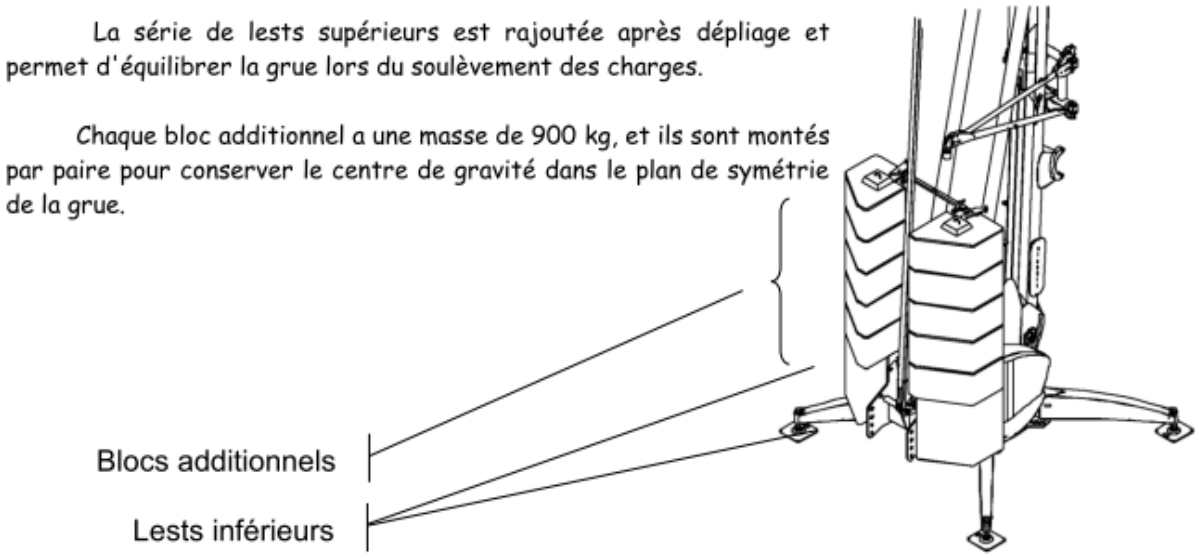
Etude de la stabilité de la grue – En phase d'utilisation

Les exigences du cahier des charges indique une charge maximale par rapport à la flèche de la grue. Afin d'atteindre cette exigence la solution retenue par le constructeur est la mise en place d'un lest. Dans cette partie nous déterminerons le lest nécessaire à l'utilisation de la grue.

Présentation :

Pour éviter le basculement de la grue vers l'avant, le constructeur prévoit l'utilisation de lests en béton placés proches des pieds arrière, et limite la charge en fonction de sa position sur la flèche (voir document constructeur en annexe)

Les deux lests inférieurs ne doivent pas être démontés, et sont nécessaires pendant le dépliage de la grue.



Hypothèses :

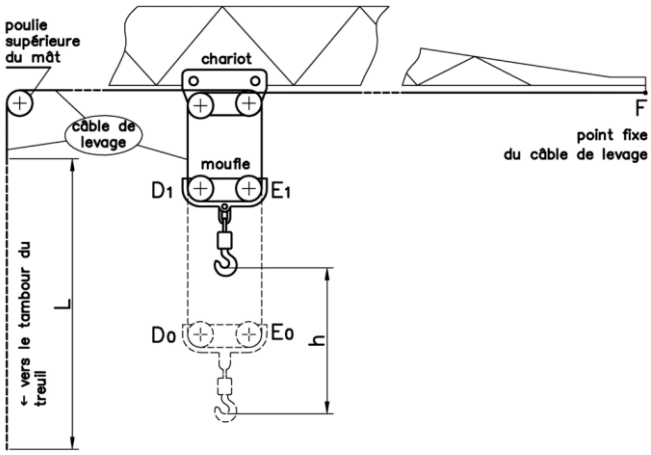
- En A et B liaison ponctuelle de la grue avec le sol
- L'action de la charge sur le crochet est modélisée par la force $\vec{C} = -C.\vec{y}$
- P_1 **poids de la grue <u>équipée de ses deux lests inférieurs</u>**, s'appliquant en G_1. $||P_1||$ = 93 200 N (masse de la grue 6200kg, masse d'un lest inférieur 1560kg)
- P_2 poids des lests additionnels s'appliquant au centre de gravité G_2 (masse d'un bloc de béton additionnel 900kg)
- On prendra g = 10 m/s^2

1 **-**Déterminer les actions mécaniques du sol sur la grue en fonction de P_1, P_2, C et des paramètres géométriques

2**-**Déterminer la charge maximale pouvant être soulever par la grue (à la limite du basculement).

3**-** Calculer la charge maximale soulevabe à une distance c=10,4m, lorsque la grue est chargé à l'aide de 8 blocs de béton additionnels. Comparer avec les informations données par le constructeur, commenter.

<u>Etude Fonction levage / maintenir la charge</u>

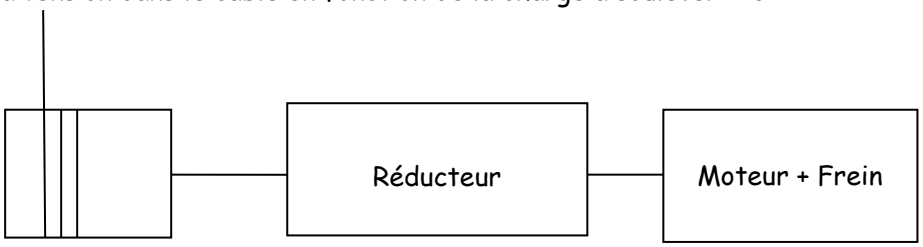


Principe de fonctionnement :

La charge est soulevée par le crochet du moufle, suspendu au câble. Le câble qui possède un point fixe en bout de flèche, circule dans les poulies du chariot, du moufle et du mât, pour s'enrouler sur le tambour du treuil de levage. Un moteur-frein suivi d'un réducteur intégré dans le tambour assurent l'entraînement et le maintien de la charge. Les éléments de calculs développés dans cette partie vont nous permettre de dimensionner ultérieurement le moteur.

La masse maximum de la charge que le treuil peut soulever avec le crochet est M = 1 800 kg. On souhaite vérifier que le couple nominal du moteur est suffisant pour soulever cette charge.

4- Calculer la tension dans le câble en fonction de la charge à soulever « C »



Diamètre poulie :
236,6mm

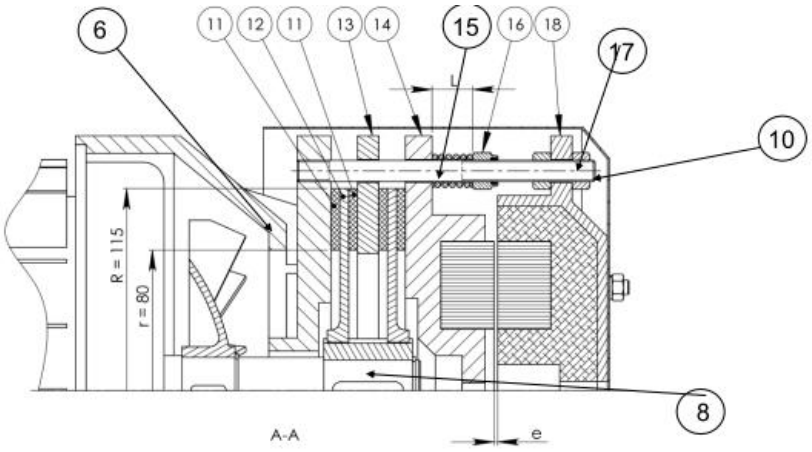
Rapport de réduction :

$$r = \frac{1}{27{,}95}$$

5- Déterminer le couple que le moteur frein doit exercer à l'entrée du réducteur pour maintenir la charge en équilibre.

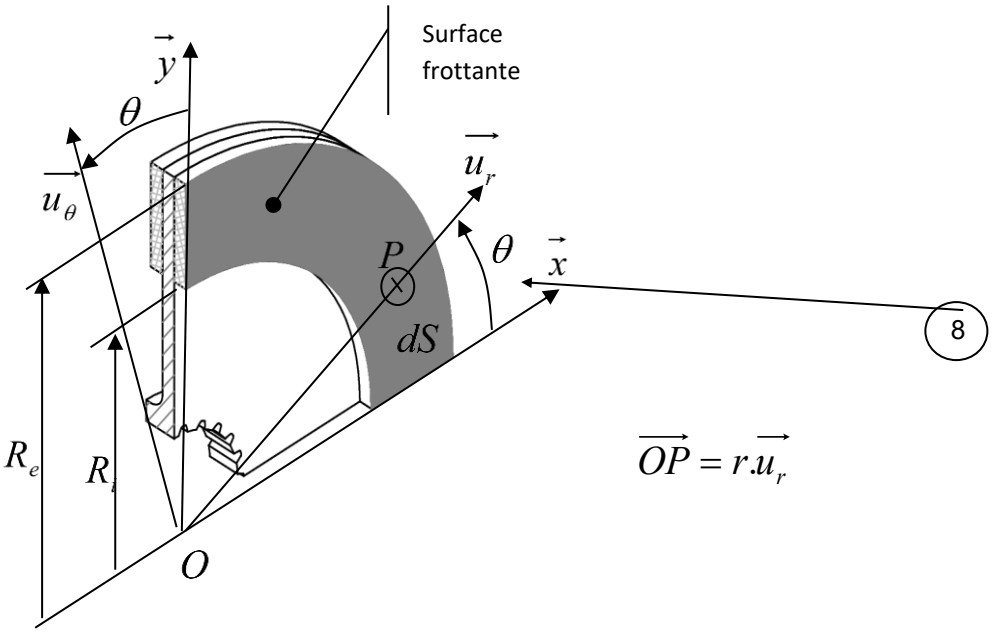
Le moteur du treuil de levage est équipé d'un frein électromagnétique à manque de courant, monté à l'arrière du moteur, sur le deuxième bout d'arbre. Il se compose de :

- Deux disques de freinage 12, coulissants sur une douille cannelée 8. Celle-ci est clavetée sur le deuxième bout d'arbre 2 du moteur.
  Les disques sont équipés de garnitures de frein 11 des deux cotés.
- Un plateau fixe 6 faisant corps avec le flasque arrière du moteur et supportant 3 colonnes 10 en acier traité.
- Un plateau flottant 13, immobilisé en rotation par les colonnes et séparant les deux disques.
- L'armature mobile 14 de l'électro-aimant, coulissant sur les colonnes 10.
- La culasse bobinée 18, fixée sur les colonnes par les écrous de réglage et d'immobilisation 17.
- Trois ressorts 15 précontraints par les écrous auto-freinés 16.
  Ces 3 ressorts exercent l'effort normal N transmis aux disques de freinage.



En l'absence de courant dans la bobine de la culasse, l'électro-aimant est au repos et les ressorts plaquent le plateau de l'armature mobile contre les disques de frein. L'arbre moteur est freiné.

Lorsque la bobine est alimentée, la culasse attire fortement l'armature mobile qui libère les disques. L'arbre moteur est libre de tourner.



6- On suppose que la pression de contact entre les garnitures et les disques de freinage est constante, Donner l'expression de la pression p en fonction de R_i, R_e et N

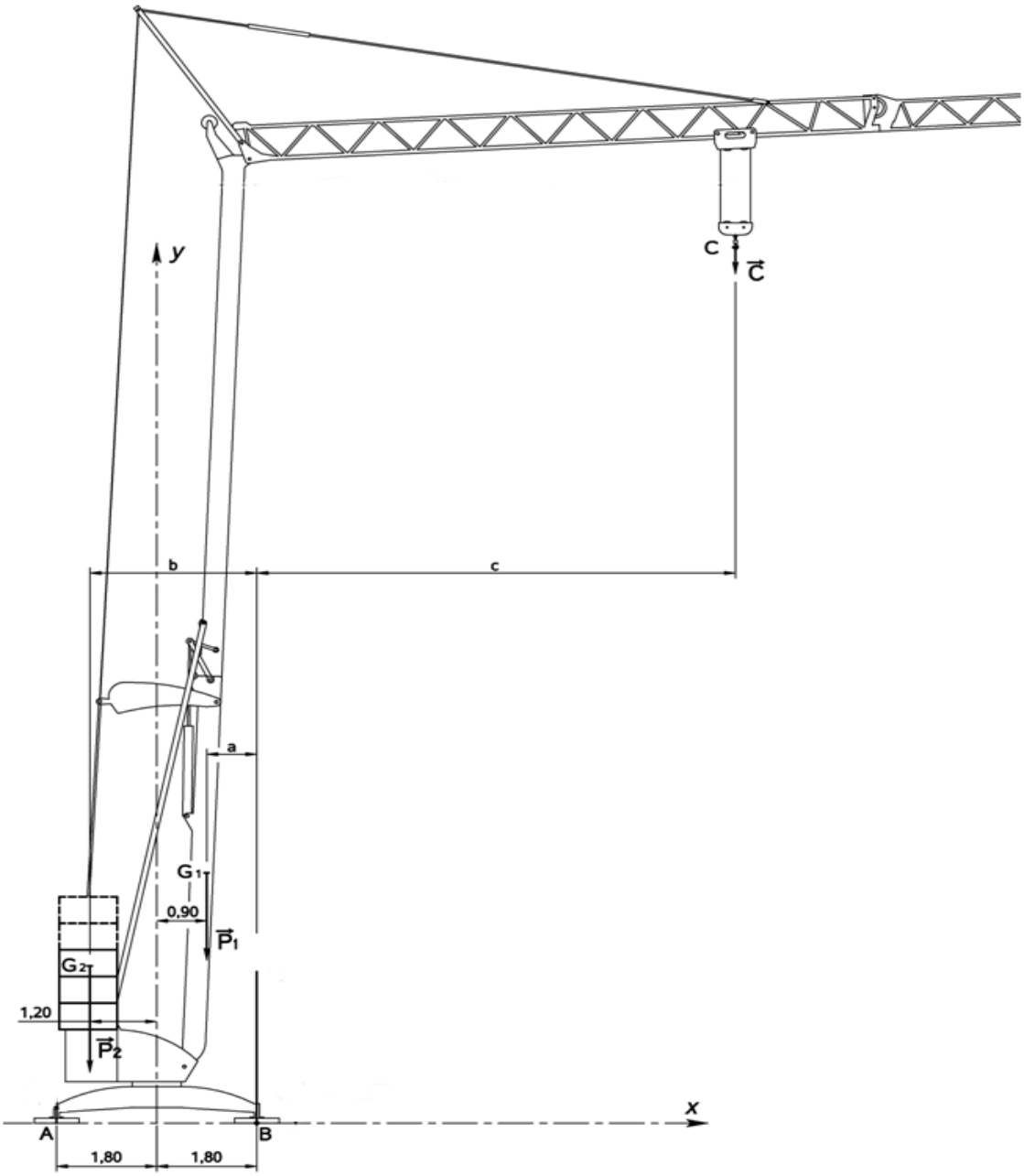
7- Donner l'expression du couple maximal transmissible par une surface frottante, en fonction de R_i, R_e, p et f (coefficient de frottement garniture/disque). Cette expression peut se mettre sous la forme $Couple = f.R_{eq}.N$, et on donnera l'expression du rayon équivalent

8-Donner l'expression du couple maximal transmissible par le frein.

9- Calculer l'effort normal N nécessaire pour obtenir le couple minimal de freinage permettant le maintien en équilibre de la charge. En déduire l'effort $F_{ressort}$ que doit exercer chacun des trois ressorts.

Données :

- Le facteur de frottement d'une garniture Ferrodo sur un plateau acier vaut f = 0,25

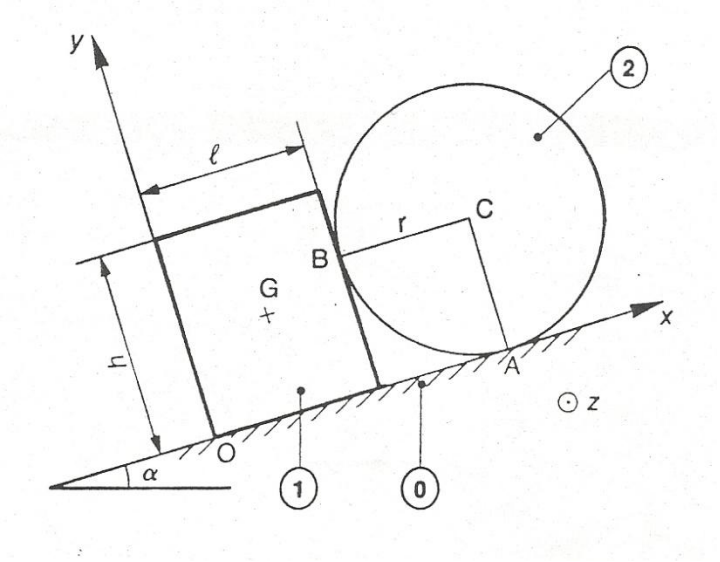

y
C
$\vec{C}$
b
c
a
G_{1T}
0,90
$\vec{P}_1$
G_{2T}
1,20
$\vec{P}_2$
x
A
B
1,80
1,80

8 EXERCICE 8 : CONVOYAGE SUR TAPIS ROULANT

Lors du convoyage d'objets fragiles sur des tapis roulant il est nécessaire de se prémunir de mouvements intempestifs de ces objets, type, glissement ou basculement. L'objet de l'étude suivante est d'analyser les conditions de non réalisation de ces phénomènes et de justifier le choix des matériaux retenus pour la conception de la bande transporteuse.

Afin de réaliser cette étude nous allons représenter le problème de la façon suivante.

Sur un plan incliné un parallélépipède rectangle (1) retient une barre cylindrique de révolution (2).



Soit R(O, x,y,z) un repère galiléen lié au plan (0), l'axe (0, x) étant dirigé suivant la ligne de plus grande pente du plan. On note a l'angle du plan (0) par rapport au plan horizontal.

Le parallélépipède rectangle (1) est homogène, de masse m et de centre de gravité G. La barre cylindrique (2) est homogène, de masse M et de centre de gravité C.

Soit f le coefficient de frottement entre les trois solides en contact.

1- Écrire les six équations scalaires déduites du Principe Fondamental de la Statique appliqué à (1) puis à (2).

2- On suppose qu'à la rupture d'équilibre:

- (1) glisse sur (0) sans basculer;
- (2) roule sans glisser sur (0);
- (2) roule et glisse sur (1).

Écrire les deux équations scalaires que l'on obtient lorsque le système est à la limite du glissement.

3- Déterminer la valeur maximale de l'angle a pour que le système reste en équilibre par rapport au plan (0).

4- A la limite du glissement, déterminer les inconnues de liaison.

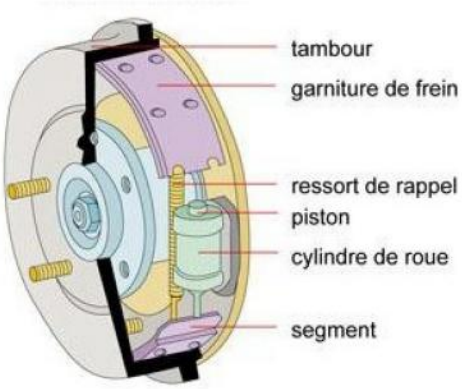
5- Vérifier la validité de l'hypothèse de rupture d'équilibre faite à la question (2).

Application numérique:

- m = 4 Kg
- M= 12 Kg
- g:=10m/s^2
- l = 100 mm
- h = 150 mm
- r= 100 mm
- f= 0,2

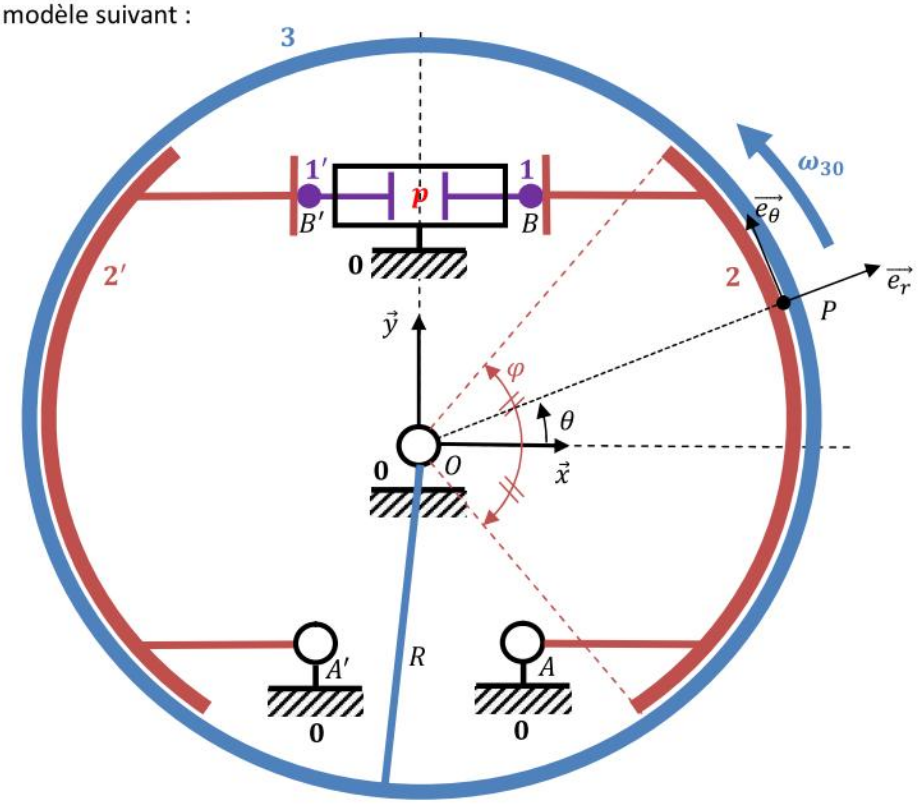
EXERCICE 9 : FREIN A TAMBOUR

Le frein à tambour est un système de dissipation d'énergie cinétique permettant de ralentir un véhicule en déplacement.



Son principe consiste plaquer des garnitures fixes par rapport au châssis du véhicule de forme cylindrique sur un tambour solidaire de l'axe de rotation des roues lui aussi cylindrique. Plus l'effort presseur est important, plus le couple de freinage est grand. La commande de freinage du conducteur est transformée en une pression p d'huile envoyée dans le cylindre de roue, générant un effort par l'intermédiaire d'un piston, effort transmis aux deux segments comportant les garnitures. Lorsque la commande est relâchée, un ressort de rappel retire les garnitures dans le but d'arrêter l'action de freinage.

On propose le modèle suivant :



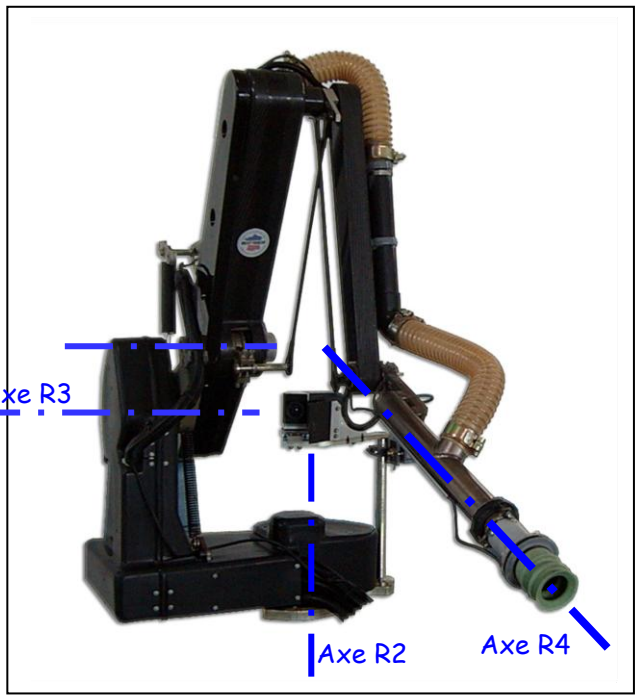
Page **1** sur **2**

Dans cette étude, on néglige l'action de l'effort de rappel devant les efforts de freinage mis en jeu.
La surface sous pression p de chaque piston est un disque de rayon r et de diamètre $d = 2r$.
On appelle e l'épaisseur dans la direction $\vec{z}$ des garnitures, c'est-à-dire de la zone de contact garniture/tambour. Le modèle proposé est dans le plan médian du frein suivant la direction $\vec{z}$
On appelle p' la pression au contact entre garnitures et tambour et on suppose qu'elle se répartie uniformément.On note f le coefficient de frottement à ce contact.
Le problème étant symétrique, intéressons-nous à un seul des deux segments.
Le sens de rotation du tambour est imposé : $\overrightarrow{\Omega_{30}} = \omega_{30}\vec{z}, \omega_{30} > 0$
On appelle $\mathfrak{B}$ la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

L'objectif de cet exercice est de déterminer les 3 torseurs des actions qui s'exercent sur la pièce 2, et en particulier le couple de freinage du frein à tambour.

Question 1: Déterminer l'effort presseur $\vec{F}$ au contact ponctuel en B entre 1 et 2 en fonction de r et p en partant du principe que l'effort issu de la pression sur le piston se transmet intégralement à ce contact
Question 2: En déduire le torseur $\{T_{12}\}$ de l'action de 1 sur 2 en B
Question 3: Donner le torseur $\{T_{02}\}$ de l'action de liaison en A de 0 sur 2
Question 4: Exprimer l'élément de surface dS du problème traité
Question 5: Donner l'expression de l'élément de force $\overrightarrow{dR_{32}}$ au contact entre 2 et 3 en P
Question 6: Déterminer la résultante $\overrightarrow{R_{32}}$ de l'action de 3 sur 2
Question 7: Donner l'expression de l'élément de moment en $O\overrightarrow{dM_{32}^{O}}$ au contact entre 2 et 3 en P
Question 8: Déterminer le moment en $\overrightarrow{OM_{32}^{O}}$ de l'action de 3 sur 2
Question 9: Donner finalement le torseur $\{T_{32}\}$ de l'action au contact entre 2 et 3 en O
Question 10: Que vaut le couple de freinage C_f du frein à tambour composé de deux segments
Question 11: Sur quels paramètres peut-on jouer pour augmenter le couple de freinage d'un frein à tambour

10 EXERCICE 10 : LE BRAS MAXPID



La maquette MAXPID fabriquée par la société PELLENC traduit, sous forme didactisée, la chaîne fonctionnelle asservie d'un bras de robot destiné à la cueillette des fruits. Le robot de cueillette possède les fonctions suivantes :

-cueillette des fruits par 2 bras robotisés montés sur une nacelle mobile qui permet de déplacer le bras devant la végétation,

-dépose des fruits cueillis sans chocs sur un tapis de collecte.

Description du bras de cueillette

L'élément essentiel de la cueillette est le bras muni de son tube de préhension. Il est associé à une caméra de vision qui détermine la position du fruit et en transmet les coordonnées au système mécanique articulé.

Les axes R2 et R3 (voir figure ci-dessus) définissent les 2 angles de visée (azimut : angle entre 2 plans verticaux mesuré dans un plan horizontal, et site-angle dans un plan vertical entre l'horizontale et la direction visée) qui permettent de pointer la direction définie par la caméra.

L'axe R4 direction de l'élongation du tube d'aspiration dans la direction du fruit suivant l'azimut et le site définis par la caméra.

Cette élongation est réalisée avec une cinématique de pantographe, c'est à dire une combinaison de rotations d'axes articulés.

Le bras n'utilise donc pour ses déplacements que des rotations.

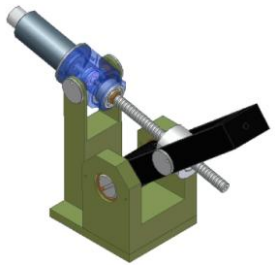
Remarques : L'axe R1 est celui qui permet de déplacer le bras devant la végétation.

Les axes R2 et R3 sont asservis en position angulaire afin de maintenir la direction de prise du fruit lors du déplacement de l'axe R4 sur le trajet aller à vide et sur le trajet retour avec le fruit.

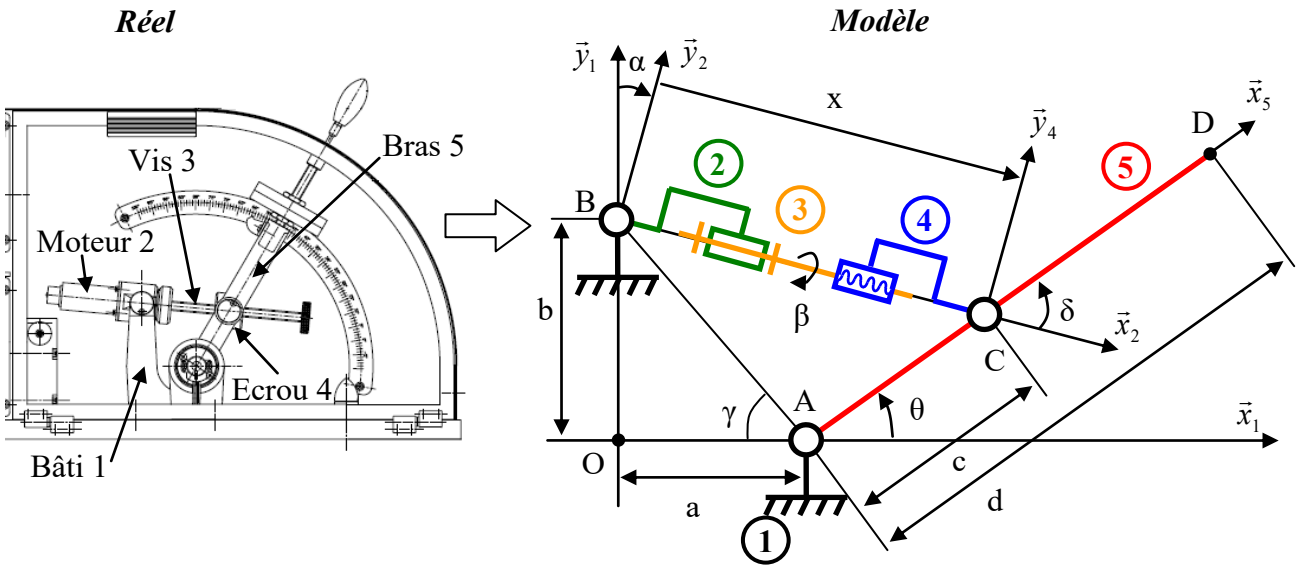
La distance entre le tube et le fruit ne peut être déterminée de manière précise par le système de caméra, aussi un capteur de contact (tube/fruit) permet d'arrêter le mouvement de pénétration du tube.

L'articulation autour de R3 représenté par la maquette du laboratoire est l'objet de notre étude.

0-Modélisation :



A partir du plan et de la maquette numérique justifier la modélisation et le paramétrage retenu pour l'étude de cet ensemble. Justifiez les hypothèses émises.



On définit les éléments suivants :

- $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ le repère associé au bâti 1.
- $R_2(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2 = \vec{z}_1)$ le repère associé au stator du moteur 2 en liaison pivot d'axe $(B, \vec{z}_1)$ avec le bâti 1 tel que $\overrightarrow{OB} = b.\vec{y}_1$ et α = $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$.
- $R_3(B, \vec{x}_3 = \vec{x}_2, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ le repère associé à la vis 3 en liaison pivot d'axe $(B, \vec{x}_3)$ avec le stator du moteur 2 tel que β = $(\vec{y}_2, \vec{y}_3) = (\vec{z}_2, \vec{z}_3)$.
- $R_4(C, \vec{x}_4 = \vec{x}_2, \vec{y}_4 = \vec{y}_2, \vec{z}_4 = \vec{z}_2)$ le repère associé à l'écrou 4 tel que $\overrightarrow{BC} = x.\vec{x}_4$.
- $R_5(A, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5 = \vec{z}_1)$ le repère associé au bras 5 en liaison pivot d'axe $(A, \vec{z}_1)$ avec le bâti 1 tel que $\overrightarrow{OA} = a.\vec{x}_1$, $\overrightarrow{AC} = c.\vec{x}_5$ et θ = $(\vec{x}_1, \vec{x}_5) = (\vec{y}_1, \vec{y}_5)$.

Le **paramètre d'entrée** est l'angle de rotation de la vis 3 par rapport au stator moteur 2 : **β**.
Le **paramètre de sortie** est l'angle de rotation du bras 5 par rapport au bâti 1 : **θ**.
La loi entrée sortie est donc une loi θ = f(β).

On donne : a = 70 mm, b = 80 mm c = 80 mm d=250mm et p=4mmtr^{-1}.

1-Analyse cinématique :

Afin de déterminer la oi de conduite du bras il est nécessaire de déterminer la relations entre les paramètres d'entrée et de sortie appelée : loi entrée-sortie.

1 -1 - Le paramètre géométrique privilégié en entrée est l'angle β, angle de rotation de la vis 3 par rapport à son support 2. Combien faut-il de relations scalaires entre les diverses inconnues géométriques pour pouvoir les exprimer en fonction de β ?

1 - 2 - Ecrire les équations vectorielles de fermetures angulaire et dimensionnelle et en déduire les équations scalaires caractéristiques de cette chaîne.

1 - 3 - Extraire la relation littérale qui exprime x, position axiale de l'écrou 4 sur la vis 3 en fonction de l'angle

d'inclinaison θ du bras 5 par rapport au bâti l. En déduire l'expression de $\beta(\theta)$, angle de rotation de la vis 3 par rapport à son support 2 en fonction de θ (supposer que β=0 quand le bras est horizontal, axe x_5 en x_1).

Transformer cette dernière relation en exprimant ß en tours et θ en degrés. On la nomme $ß_{tr}(\theta)$.

Tracer la courbe théorique $\beta_{tr}(\theta)$ correspondante, θ variant de 0° à 100°. Indiquer les valeurs remarquables.

1 - 4 - Remplacer cette courbe par une droite dans une zone qui reste à déterminer et écrire la relation $\beta_{tr1}(\theta)$ permettant cette approximation. Tracer cette droite, évaluer l'écart relatif et conclure.

1-5 En vue de mener l'étude statique, à partir des équations de fermeture de la chaîne cinématique O, B, C, A, déduire une relation entre θ et α. Déduire la relation $\delta = f(\theta)$

2-<u>Analyse statique :</u>

Le couple moteur maximal délivrable part l'actionneur est définie dans la fiche constructeur jointe. Nous allons tenter d'estimer avec quelle marge celui-ci remplie son rôle.

Le système MAXPID est en position verticale. Il est chargé en bout de bras par un ensemble de disques de masse M. Le poids des autres solides du mécanisme est négligeable. Le schéma cinématique du mécanisme est donné en annexe. Les repères associés aux différents solides et les paramètres des liaisons sont définis sur ce schéma. On note C_m le couple moteur d'axe x_2 exercé par le stator 2 sur le rotor lié à la vis 3.

2 –1 A partir du modèle proposé, exprimer les torseurs des actions mécaniques agissant sur les différents solides du mécanisme.

2 – 2 Calculer la relation entre le couple moteur C_m et position angulaire θ du bras 5, pour chaque solide isolé, on écrira uniquement l'équation nécessaire à la résolution du problème posé:

- pour un solide en rotation autour d'un axe, l'équation utile correspond à la projection sur l'axe de rotation de l'équation de moment du PFS.
- pour un solide en translation rectiligne, l'équation utile correspond à la projection sur l'axe de translation de l'équation de la résultante du PFS.

On isolera et on appliquera successivement le PFS aux solides 3, 4, 5 puis à l'ensemble 2 + 3 + 4, on en déduira la relation $C_m = f(\theta, \delta)$.

2-3 Application numérique: calcul du couple moteur théorique

Données: Masse d'un disque m = 650 g, Géométrie du mécanisme voir schéma précédent

2-4 Calculer le couple moteur C_m lorsque le bras 5 est en position horizontale et qu'il est chargé avec 4 disques.

Calculer l'intensité du courant nécessaire pour maintenir en permanence l'équilibre du bras dans cette position.

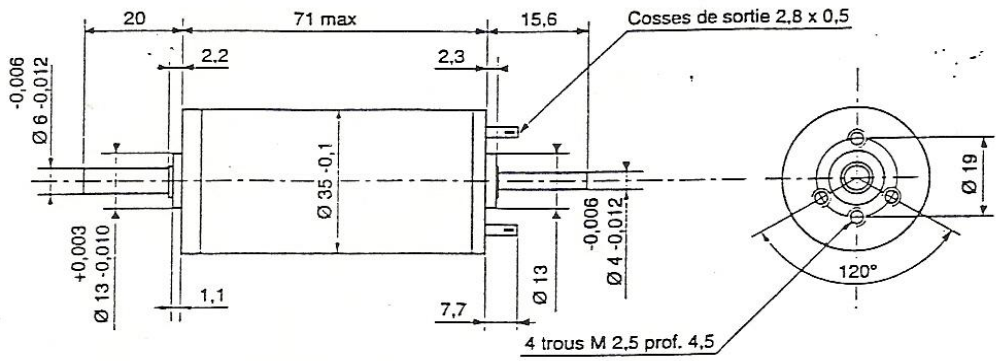
On rappelle que dans un moteur à courant continu le couple moteur est proportionnel au courant traversant les bobinages:

$C_m = k_t\, I$ (k_t est la constante de couple du moteur, exprimée en Nm / A), se reporter à la notice technique du moteur MAXON RE 035 G - Version 34

Evaluer la capacité du moteur à maintenir le bras chargé de 4 disques en position horizontale.

MOTEURS D'ASSERVISSEMENT DC

MOTEUR RE 035 G — 40 W



Caractéristiques des versions		34	39
1 * Tension de mesure	Volt	24	48
2 * Cte couple / vitesse	tr / mn / mNm	7,1	7,61
3 Vitesse limite	tr / mn	6600	6600
4 * Puissance utile max	W	66,9	50,1
5 Courant max. permanent iz	mA	1350	607
6 Couple au courant iz	mNm	71	70
7 Vitesse au courant iz	tr / mn	3775	3290
8 * Vitesse à vide	±10% tr / mn	4280	3820
9 * Accélération angul. max	rad /s²	-	-
10 * Courant à vide	+50% mA	65,1	27,8
11 * Couple démarrage	±15% mNm	615	508
12 Courant de démarrage	A	11,7	4,29
13 * Rendement max	%	83,4	83,8

			34	39
14 * Couple de friction	mNm		3,2	3,2
15 * Résistance aux bornes	Ohm		2,05	11,2
16 Inductance aux bornes	mH		0,62	3,16
17 Cte de vitesse	tr / mn / V		178	79,5
18 Cte de couple	mNm / A		52,5	119
19 Cte FEM	V / 1000 tr		5,6	12,5
20 * Cte de temps électromécanique	ms		5,03	4,86
21 Inertie du rotor	gcm²		67,6	60,9
22 Cte thermique rotor / boitier	°C / W		6,9	6,9
23 Cte thermique boitier / air	°C / W		9,7	9,7
24				

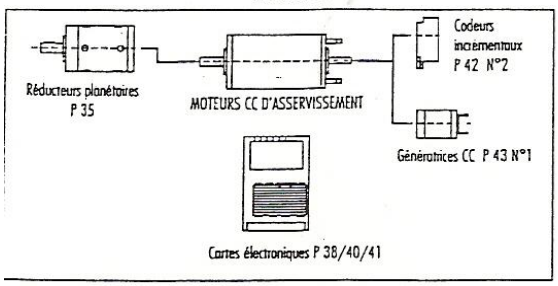
Les caractéristiques * sont données pour une température du rotor de 25 °C

Généralités

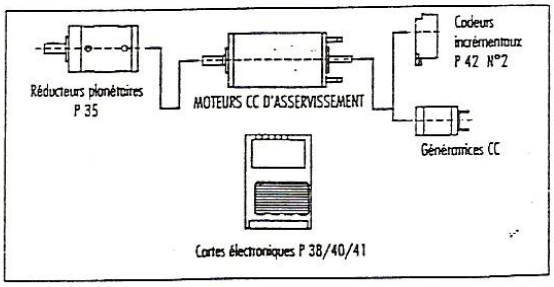
- Commutation — graphite
  Nb de lames collecteur — 13
- Paliers — roulements
- Aimants — terre rare Neodym
- Jeu axial — 0,05 - 0,15 mm
- Jeu radial — 0,05 mm
- Charge axiale max. — 2,4 N
- Charge radiale max. à 5 mm de la face de fixation — 28 N
- Force de chassage max. — 110 N
- Températures ambiantes de fonctionnement — -20 / +100° C
- Température max. rotor — +125° C
- Poids — 370 g

Options

Version 34



Version 39



Programme Topstock | Programme Standard