

Feuille d'exercices 2

ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Exercice 2.

$$(c) \quad |2x-1| = |x+4| \Leftrightarrow (2x-1)^2 = (x+4)^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x - 15 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } 5.$$

$$(d) \quad |3x| \leq |2x+3| \Leftrightarrow (3x)^2 \leq (2x+3)^2 \Leftrightarrow 5x^2 - 12x - 9 \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{3}{5}, 3\right].$$

Exercice 3.

(e) L'équation (E) est définie sur $D = [1, +\infty[$. On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in D, \quad (E) &\Leftrightarrow (x+1) + (x-1) + 2\sqrt{x^2-1} < 3x+1 \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-1} < x+1 \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{x-1} < \sqrt{x+1} \\ &\Leftrightarrow 4(x-1) < x+1 \\ &\Leftrightarrow x < \frac{5}{3} \end{aligned}$$

donc l'ensemble des solutions de (E) est $\left[1, \frac{5}{3}\right[$.

(f) L'équation (E) est définie sur $D = \mathbb{R}_+$. On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in D, \quad (E) &\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x}-2)^2} \geq 3 \\ &\Leftrightarrow |\sqrt{x}-2| \geq 3. \end{aligned}$$

Par disjonction de cas :

- $\forall x \in [1, 4], (E) \Leftrightarrow 2 - \sqrt{x} \geq 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq -1$, ce qui est impossible,
- $\forall x \in [4, +\infty[, (E) \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 5 \Leftrightarrow x \geq 25$,

donc l'ensemble des solutions de (E) est $[25, +\infty[$.

Exercice 4.

$$(a) \quad \text{On a : } (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0.$$

La dernière assertion est évidemment vraie, donc, par équivalence, la première l'est aussi.

$$(b) \quad \text{D'après (a) : } (a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2 \geq 4ab \times 4bc \times 4ca = 64a^2b^2c^2, \text{ donc, en passant à la racine carrée : } (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

$$\begin{aligned} (c) \quad \text{D'après (b) : } \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) &\geq 8, \text{ donc } (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 3 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \\ &\frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} = 1 + \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \geq 9. \end{aligned}$$

Exercice 5. L'équation est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{0, -a-b\}$. On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in D, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} &= \frac{1}{x+a+b} \Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} = -\frac{a+b}{x(x+a+b)} \\ &\Leftrightarrow x(x+a+b) = -ab \\ &\Leftrightarrow x^2 + (a+b)x + ab = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+a)(x+b) = 0 \\ &\Leftrightarrow x+a = 0 \text{ ou } x+b = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -a \text{ ou } x = -b, \end{aligned}$$

donc $S = \{-a, -b\}$.

Exercice 6. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. On a : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (a+bx)^2 + (c+dx)^2 \geq 0$, donc le discriminant Δ du trinôme $f(x)$ est négatif. Or :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (b^2 + d^2)x^2 + 2(ab + cd)x + (a^2 + c^2),$$

donc : $\Delta = 4(ab + cd)^2 - (a^2 + c^2)(b^2 + d^2)$. Donc $(ab + cd)^2 \leq (a^2 + c^2)(b^2 + d^2)$, donc $|ab + cd| \leq \sqrt{a^2 + c^2} \sqrt{b^2 + d^2}$.

Exercice 9.

(a) D'après la formule des sommes géométriques : $\sum_{k=0}^n \frac{1}{4^k} = \frac{1 - \frac{1}{4^{n+1}}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right) \leq \frac{4}{3},$

(b) $\sum_{k=0}^n k! \leq \sum_{k=0}^n n! = (n+1) \times n! = (n+1)!.$

Exercice 10.

(d) $\prod_{k=1}^n \frac{2k+3}{2k-1} = \frac{5}{1} \frac{7}{3} \frac{9}{5} \cdots \frac{2n-1}{2n-5} \frac{2n+1}{2n-3} \frac{2n+3}{2n-1} = \frac{(2n+1)(2n+3)}{3}.$

Exercice 12.

(e) $\sum_{0 \leq i, j \leq n} \min(i, j) = 2 \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} i - \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} i = 2 \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j i - \sum_{i=0}^n i = \sum_{j=0}^n j(j+1) - j = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$

(f) $\sum_{0 \leq i, j \leq n} |i - j| = 2 \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} (j - i) = 2 \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j (j - i) = \sum_{j=0}^n j(j+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a directement : $I_n + J_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n,$

et d'autre part, si $n \geq 1$: $I_n - J_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0,$

donc, si $n \geq 1$: $I_n = J_n = 2^{n-1}$. Par ailleurs, on calcule directement : $I_0 = 1$ et $J_0 = 0$.

Exercice 14.

(a) On a : $2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \geq \sum_{k=0}^n 1 = n+1,$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}_+ :$ $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \geq \binom{n}{0} x^0 + \binom{n}{1} x^1 = 1 + nx.$

Exercice 16.

(a) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times 1^k \times 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n,$

(b) $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} = n 2^{n-1},$

(c)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^n k(k-1) \binom{n}{k} + \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} \\ &= \sum_{k=2}^n n(n-1) \binom{n-2}{k-2} + n2^{n-1} \\ &= n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1}\end{aligned}$$

Exercice 17.

(a) Par récurrence sur n : l'assertion est vraie pour $n = p$; supposons-la vraie pour un certain $n \geq p$,

alors : $\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+2}{p+1}$; donc l'assertion est vraie au rang $n+1$.

(b) Pour $p = 1$: $\sum_{k=1}^n \binom{k}{1} = \sum_{k=1}^n k = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$,

(c) Pour $p = 2$: $\sum_{k=1}^n \binom{k}{2} = \sum_{k=1}^n \frac{k(k-1)}{2} = \binom{n+1}{3} = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$, d'où $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 19. D'après la formule du binôme de Newton :

$$(2 + \sqrt{3})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sqrt{3}^k 2^{n-k} \quad \text{et} \quad (2 - \sqrt{3})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \sqrt{3}^k 2^{n-k},$$

donc :

$$\begin{aligned}(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1 + (-1)^k) \sqrt{3}^k 2^{n-k} \\ &= 2 \sum_{k=0, k \text{ pair}}^n \binom{n}{k} \sqrt{3}^k 2^{n-k}.\end{aligned}$$

Or, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ pair, $\sqrt{3}^k$ est un entier, donc la dernière somme ci-dessus est un entier ; donc $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$ est un entier pair.

Exercice 20. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule du binôme de Newton :

$$(1 + \sqrt{2})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sqrt{2}^k = \sum_{0 \leq 2p \leq n} \binom{n}{2p} 2^p + \sum_{0 \leq 2p+1 \leq n} \binom{n}{2p+1} 2^p \sqrt{2},$$

donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \sum_{0 \leq 2p \leq n} \binom{n}{2p} 2^p \quad \text{et} \quad b_n = \sum_{0 \leq 2p+1 \leq n} \binom{n}{2p+1} 2^p.$$

On peut vérifier que les suites (a_n) et (b_n) sont caractérisées par :

$$a_0 = 1, \quad b_0 = 0, \quad \text{et} : \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = a_n + 2b_n, \quad b_{n+1} = a_n + b_n.$$