

Corrigé TD3 : Séries

Ne sont corrigés que les exos non traités avec l'ensemble des 2 groupes.

Exercice 26 (Equivalent)

En utilisant une comparaison série intégrale sur la fonction $f : x \geq 0 \rightarrow \sqrt{x}$, vérifier que, si $n \rightarrow \infty$:

$$\sum_{k=0}^n \sqrt{k} \sim \frac{2n^{3/2}}{3}.$$

Exercice 27 (En vrac)

Nature de la série de terme général :

i) $u_n = \frac{2 \times 4 \times \dots \times (2n)}{n^n}$. ii) $u_n = \ln(\operatorname{ch}(\frac{1}{\sqrt{n}}))$. iii) $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin(t)}{2+t} dt$. iv) $u_n = \frac{\pi}{2} - \arctan(n^2 + 1)$.

Exercice 28 (Constante d'Euler)

1) Montrer que la suite $(\sum_{k=n}^{3n} \frac{1}{k})$ converge vers une limite à préciser.

2) Vérifier que la série de terme général $\frac{1}{2n(2n+1)}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 29 (D'Alembert versus Stirling)

On se donne un réel strictement positif β et on pose, pour tout n , $u_n = \frac{1}{2^n} \binom{3n}{n} \beta^{3n}$.

Nature suivant β de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$?

Exercice 30 (Vieil exo ENS)

On se donne une série à termes positifs $\sum_{n \geq 0} u_n$. Que dire de la nature de $\sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{1+u_n}$ suivant celle de

$\sum_{n \geq 0} u_n$?

(On pourra distinguer les cas $\sum_{n \geq 0} u_n$ ne diverge pas grossièrement et $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge grossièrement).

Solution : On posera, pour tout $n \geq 0$, $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$.

CAS 1 : $u_n \rightarrow 0$. Alors $v_n \sim u_n$ et ainsi les deux séries, par principe de comparaison pour les STP, sont de même nature.

CAS 2 : $u_n \nrightarrow 0$; supposons que $v_n \rightarrow 0$. Comme $u_n = \frac{v_n}{1-v_n}$, on voit que $u_n \rightarrow 0$; c'est absurde et donc nos deux séries divergent grossièrement simultanément.

Il en résulte que les deux séries ont toujours même nature ■

Exercice 31 (Lien suite - série)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in]0, 1[$ et $u_{n+1} = u_n - u_n^2$, pour tout n .

Nature de la série de terme général u_n^2 ?

Exercice 32 (Oral Mines)

- a) Discuter suivant les réels a, b, c de la nature de la série de terme général $a \ln(n+2) + b \ln(n+1) + c \ln(n)$.
 b) Dans le cas de convergence, déterminer la somme de cette série.

Exercice 33 (Semi-convergence)

Pour tout entier n , on pose $u_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

On se propose de déterminer la nature de $\sum_{n \geq 0} u_n$.

- 1) Prouver que $\sqrt{n^2+1} = n(1 + \frac{1}{2n^2} + O(\frac{1}{n^4}))$.
- 2) En déduire que $u_n = (-1)^n \sin(\frac{\pi}{2n} + O(\frac{1}{n^3}))$.
- 3) Cette série est-elle absolument convergente?
- 4) Montrer que $u_n = (-1)^n \frac{\pi}{2n} + O(\frac{1}{n^3})$. Conclure.

Exercice 34 (Mines)

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes strictement positifs divergente dont (S_n) désigne la suite des sommes partielles.

Nature de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{S_n}$ et de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{S_n^2}$.

(Traiter des cas particuliers pour voir quoi prouver dans le cas général).

Solution : En testant la série géométrique de raison $q > 1$, il semble que la première série diverge et la seconde converge.

Nous allons prouver ce résultat.

On pose, pour tout n , $v_n = \frac{u_n}{S_n}$.

Supposons que $\sum_{n \geq 0} v_n$ alors (R_n) la suite de ses restes doit converger vers 0. Mais, pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$,

$$v_{n+1} + \dots + v_{n+p} \geq \frac{\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k}{S_{n+p}} = 1 - \frac{S_n}{S_{n+p}}.$$

En fixant n et en faisant tendre p vers $+\infty$, il vient alors $R_n \geq 1$ (la divergence de $\sum_{n \geq 0} u_n$ fait que la suite

de ses sommes partielles diverge vers $+\infty$); ce qui est contradictoire ■

Maintenant posons $w_n = \frac{u_n}{S_n^2}$, ce pour tout n . La croissance de la suite (S_n) fait que, dans le même contexte,

$0 \leq w_n \leq \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n S_{n-1}} = \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}$; comme la suite $(\frac{1}{S_n})$ converge vers 0, le lien suite-série et le principe de comparaison pour les STP nous assure bien la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} w_n$ ■

Exercice 35 (Somme de série)

En revenant aux sommes partielles et après avoir vérifié leur convergence déterminer les sommes des séries suivantes .

a) $\sum_{n \geq 2} \ln(1 - \frac{1}{n^2})$. b) $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n^2-1)}$. c) $\sum_{n \geq 0} \arctan(\frac{1}{n^2-n+1})$. d) $\sum_{n \geq 0} (\sum_{p=0}^n \frac{(-1)^{n-p}}{(p+1)(p+2)(n-p)!})$.

Exercice 36 (X)

- a) Existe-t-il une série à termes complexes $\sum u_n$ convergeant mais telle que $\sum u_n^3$ diverge.
 b) Même question avec séries à termes réels.

On pourra admettre que les séries de termes généraux $\frac{j^n}{n^{1/3}}$ et $\frac{j^n}{n}$ convergent.

Solution :

a) On pose pour tout $n \geq 1$: $u_n = \frac{j^n}{n^{1/3}}$. Alors $u_n^3 = \frac{1}{n}$. La réponse est donc OUI $\square$

b) Oui encore en posant $n \geq 1$: $u_n = \frac{\cos(2n\pi/3)}{n^{1/3}}$: alors (simple linéarisation : $\cos^3(x) = \frac{\cos(3x) + 3\cos(x)}{4}$ pour x réel) $\sum u_n^3$ diverge en vertu de la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \operatorname{Re}\left(\frac{j^n}{n}\right)$ et de la divergence de la série harmonique ■

Exercice 37 (ENS)

Nature de la série dont le terme général est le reste d'ordre n de la série harmonique alternée?

Solution :

Notons, $n \geq 1$, R_n ce reste.

La convergence de la série harmonique alternée procure la convergence vers 0 de la suite (R_n) .

Le théorème de Leibniz, appliqué à la série harmonique alternée, nous montre par ailleurs que la série $\sum_{n \geq 1} R_n$ est alternée.

Il semble légitime de penser que la série à étudier relève du théorème de Leibniz.

Il va nous suffire alors de vérifier que la suite $(|R_n|)$ décroît.

Le plus simple est de passer par des intégrales (cf votre cours où on a prouvé que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$.)

On a donc et pour tout $n \geq 1$: $R_n = \ln(2) - S_n = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} - \sum_{k=1}^n (-x)^{k-1} \right) dx = (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x}$.

La croissance de l'intégrale fournit alors la décroissance voulue et $\sum_{n \geq 1} R_n$ converge par le théorème de Leibniz ■

Exercice 38 (X)

Nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin^2(n)}{n}$?