

Corrigé du DL1 (2 heures max). Algèbre linéaire et Séries

Travailler qualité de la rédaction et rigueur des arguments donc (devise de Gauss) "Pauca sed matura"

Toute copie mal présentée ne sera pas corrigée.

Exercice 1 : (Partie à traiter en classe ce mercredi)

On se donne $A \in M_n(K) = E$ et on définit $f_A : M \in E \rightarrow AM$.

- 1) Etablir que $f_A \in L(E)$.
- 2) Soit $B \in E$. Vérifier que $f_A \circ f_B = f_{AB}$.
- 3) Etablir que $f_A \in GL(E)$ si $A \in GL_n(\mathbb{K})$.
- 4) On suppose A non inversible, établir que $Im(f) \subset E \setminus GL_n(\mathbb{K})$.
Faire une synthèse de 3) et 4).

Pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on pose E_{ij} est l'élément de E dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice i, j égal, lui, à 1.

On pose $b = (b_j)_{1 \leq j \leq n}$, où $b_j = (E_{1j}, \dots, E_{nj})$. C'est une base E .

On vérifie sans peine que : $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$, ce pour $(i, j, k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket^4$.

- 5) On suppose ici $n = 2$. Préciser la matrice de f_A dans la base b . En déduire la trace et le déterminant de f_A .

- 6) Généraliser à n quelconque ce qui est demandé en 5).

Solution : Questions 1) à 5) grosso modo faites en classe.

- 6) Fixons l'entier $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f_A(E_{ij}) = AE_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ki}E_{kj}$. Ainsi les composantes de $f_A(E_{ij})$ dans la base b sont nulles suivant les membres de b_s pour $s \neq j$ et la colonne des composantes $f_A(E_{ij})$ dans b_j est la i -ème colonne de A ; il en résulte que la matrice de f_A dans la base b est $diag(A, \dots, A)$, avec n occurrences de A . Ainsi $\boxed{\det(f_A) = \det(A)^n \text{ et } tr(f_A) = ntr(A)}$ ■

Exercice 2 : (Séries : Niveau 1)

- 1) Etablir que la série de terme général $\frac{\sin(\frac{2n\pi}{3})}{2^n}$ est convergente et déterminer sa somme.

- 2) Nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$?

Solution : 1) Posons, pour tout n , $u_n = \frac{\sin(\frac{2n\pi}{3})}{2^n}$ et $q = \frac{j}{2}$.

Comme $|q| = 1/2$, la série géométrique $\sum_{n \geq 0} q^n$ est convergente donc, par propriété (puisque $u_n = Im(q^n)$,

pour tout n), $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge bien et sa somme, notée S , vaut $S = Im(\frac{1}{1-q}) = Im(\frac{2(2-j^2)}{7})$. Soit

$$\boxed{S = \frac{\sqrt{3}}{7}} \quad \square$$

- 2) On note, pour $n \geq 1$, u_n le terme général de la série à étudier, il vient $u_n = \frac{\exp(\frac{-\ln(n)}{n})}{n} \sim \frac{1}{n}$. Ainsi, par principe de comparaison pour les STP, $\sum_{n \geq 1} u_n$ diverge ■

Exercice 3 : (Séries de Bertrand, je n'y suis pour rien!)

Pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et pour $n \geq 2$, on pose $u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$.

1) A l'aide de la règle n^γ , préciser la nature de $\sum_{n \geq 2} u_n$ pour $\alpha \neq 1$.

Désormais $\alpha = 1$ et on pose $f : x \geq 2 \rightarrow \frac{1}{x(\ln(n))^\beta}$.

2) Etablir qu'il existe un entier $m \geq 2$ pour lequel f décroît sur $[m, +\infty[$.

3) A l'aide d'une comparaison série intégrale, prouver que $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

Solution : 1) CAS 1 : $\alpha > 1$. $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge.

En posant $\gamma = \frac{1+\alpha}{2} > 1$, il vient : $n^\gamma u_n = \frac{(\ln(n))^{-\beta}}{n^{\frac{\alpha-1}{2}}}$.

Par croissance comparée ($\alpha - 1 > 0$), $n^\gamma u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$; ainsi, par comparaison avec une série de Riemann convergente, $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge $\square$

CAS 2 : $\alpha < 1$. $\sum_{n \geq 2} u_n$ diverge.

En posant $\gamma = \frac{1+\alpha}{2} < 1$, il vient : $n^\gamma u_n = \frac{n^{\frac{1-\alpha}{2}}}{(\ln(n))^\beta}$.

Par croissance comparée ($\alpha - 1 < 0$), $n^\gamma u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$; ainsi, par comparaison avec une série de Riemann divergente, $\sum_{n \geq 2} u_n$ diverge $\square$

2) La fonction f est dérivable sur son intervalle de définition et, pour $x \geq 2$, $f'(x) = -(\ln(x))^{-\beta-1}(\frac{\beta + \ln(x)}{x^2})$.

Clairement $f'(x) \leq 0$ dès que $x \geq m = \max(2, \exp(-\beta))$ d'où le résultat attendu $\square$

3) f est décroissante, continue et positive sur $[m, +\infty[$ et la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ est de même nature que $\sum_{n \geq m} u_n$.

Tout semble propice à l'emploi d'une comparaison série-intégrale.

On pose, pour tout $n \geq m$, $S_n = \sum_{k=m}^n u_k$.

Là encore on envisage deux cas et on suppose, sans perte de généralité, $m > 2$:

CAS 1 : $\beta > 1$. $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge.

Par considération d'aire $u_n \leq \int_{n-1}^n f(x)dx$ d'où, par sommation, $S_n \leq \int_{m-1}^n \frac{(\ln(x))^{-\beta}}{x} dx = \left[\frac{(\ln(x))^{1-\beta}}{1-\beta} \right]_{m-1}^n$.

Ainsi $S_n \leq \frac{(\ln(m))^{1-\beta}}{\beta-1}$, ce pour tout $n \geq m$. Ceci montre, notre série étant à termes positifs, que la suite de ses sommes partielles converge puisque majorée et achève ce cas.

CAS 2 : $\beta = 1$. $\sum_{n \geq 2} u_n$ diverge.

Il en résultera par simple comparaison (P_1) qu'il y aura, et a fortiori, divergence si $\beta < 1$.

Pour $n \geq m$, $u_n \geq \int_n^{n+1} f(x)dx$ d'où, par sommation, $S_n \geq \int_m^{n+1} \frac{(\ln(x))^{-\beta}}{x} dx \geq \frac{(\ln(n+1))^{1-\beta}}{1-\beta}$.

Il en retourne que $S_n \rightarrow +\infty$ et la divergence souhaitée $\blacksquare$

Exercice 4 : (Algèbre linéaire)

Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et $p_1, \dots, p_r$ des projecteurs de E tels que $(1) : \sum_{i=1}^r p_i = id_E$.

On désigne par ω l'endomorphisme nul de E .

a) Que vaut la trace d'un projecteur?

b) Etablir que $E = \sum_{i=1}^r Im(p_i)$.

c) Comparer $\dim(\sum_{i=1}^r Im(p_i))$ et $\sum_{i=1}^r \dim(Im(p_i))$. Que pouvez-vous en déduire?

d) On suppose les entiers i et j différents, vérifier que $p_i \circ p_j = \omega$.

Solution : a) C'est aussi son rang.

b) Prenons $x \in E$ alors $\sum_{i=1}^r p_i(x) = id_E(x) = x$, ce qui montre que $x \in \sum_{i=1}^r Im(p_i)$.

D'où le résultat, par double inclusion.

c) Elles sont égales par linéarité de la trace et la question précédente. Ceci prouve que la somme en question est directe.

d) Fixons $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et composons chaque membre de l'égalité (1) à droite par p_j . Il vient alors (par définition d'un projecteur) :

$\sum_{i \neq j} p_i \circ p_j + p_j = p_j$ puis, pour tout $x \in E$, $\sum_{i \neq j} p_i(p_j(x)) = 0_E$ et puisque les $Im(p_i)$, $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, sont en somme directe, nous obtenons enfin $p_i(p_j(x)) = 0_E$, pour tout $i \neq j$ et tout $x \in E$ soit $\boxed{p_i \circ p_j = 0}$ ■