

Devoir surveillé n° 1

Durée : 3 heures. Calculatrices non autorisées.

La notation tiendra largement compte de la qualité de la rédaction.

Les résultats doivent être encadrés. Il est inutile de recopier l'énoncé.

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre souhaité.

Les exercices qui ne sont pas traités dans l'ordre doivent être rédigés sur des copies séparées.

Le sujet et le brouillon ne sont pas à rendre. Le barème est indicatif.

Exercice 1. (6 points) On considère deux assertions $A = (ab \geq a)$ et $B = ((a \leq 0) \vee (b \geq 1))$, puis l'assertion P suivante :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, (A \Rightarrow B).$$

1. Écrire P en toutes lettres.
2. Écrire la négation de A et celle de B (en symboles mathématiques).
3. En déduire la négation de P .
4. Soient $a, b \in \mathbb{R}$.
 - (a) Écrire la contraposée de $A \Rightarrow B$.
 - (b) Cette contraposée est-elle vraie ?
 - (c) L'assertion P est-elle vraie ?

Exercice 2. (6 points) On considère un réel non nul x tel que $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$.

1. En développant $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$, montrer que $x^2 + \frac{1}{x^2} \in \mathbb{Z}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Développer $\left(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}\right) \left(x + \frac{1}{x}\right)$.
3. En raisonnant par récurrence double, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$.
4. Donner un exemple (différent de 1 et -1) d'un tel x .

Exercice 3. (6 points) Pour tout m dans $\mathbb{R}$, on considère l'équation d'inconnue réelle x :

$$(E_m) : \sqrt{x^2 + mx + 4} \leq x + 1.$$

1. Vérifier que l'équation (E_0) est définie sur $\mathbb{R}$, et la résoudre.
2. Faire de même pour (E_{-4}) .
3. Montrer que (E_m) est définie sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $m \in [-4, 4]$.
Dans le cas où $m \notin [-4, 4]$, déterminer le domaine de définition D de (E_m) .
4. Résoudre l'équation (E_{14}) .
Indication : $7 - 3\sqrt{5} \simeq 0,292$.

Problème. (12 points) Le but de ce problème est de démontrer, de deux manières différentes, l'inégalité de Nesbitt :

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

I. Pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$, on note :

$$A(x, y, z) = \frac{x+y+z}{3} \quad \text{et} \quad H(x, y, z) = \frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}},$$

appelées respectivement la *moyenne arithmétique* et la *moyenne harmonique* de x, y et z .

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Soient $p, q \in \mathbb{R}$. Montrer que $2pq \leq p^2 + q^2$.
2. En déduire que : $2xyz \leq x^2y + yz^2$.
3. En déduire que : $9xyz \leq (x+y+z)(xy+yz+xz)$.
4. Montrer que : $H(x, y, z) = \frac{3xyz}{xy+yz+xz}$.
5. Déduire des questions précédentes l'inégalité arithmético-harmonique :

$$H(x, y, z) \leq A(x, y, z).$$

6. En appliquant l'inégalité arithmético-harmonique à $x = a+b, y = a+c, z = b+c$, montrer l'inégalité de Nesbitt.

II. Pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$, on note : $G(x, y, z) = \sqrt[3]{xyz}$ la *moyenne géométrique* de x, y et z .

1. Étudier les variations sur $[0, 1]$ de la fonction $f : x \mapsto x(1-x)^2$.
2. En déduire que : $\forall s \in [0, 1], s(1-s)^2 \leq \frac{4}{27}$.
3. Soit $s \in]0, 1[$. On pose : $\forall t \in [0, 1-s], g(t) = st(1-s-t)$.
Déterminer le maximum sur $[0, 1-s]$ de la fonction g .
4. En déduire que : $\forall p, q, r \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $p+q+r=1, pqr \leq \frac{1}{27}$.
5. En appliquant cette dernière inégalité à $p = \frac{x}{x+y+z}, q = \frac{y}{x+y+z}$ et $r = \frac{z}{x+y+z}$, montrer l'inégalité arithmético-géométrique :

$$G(x, y, z) \leq A(x, y, z).$$

6. En appliquant deux fois l'inégalité arithmético-géométrique à des nombres bien choisis, montrer que :

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}_+^*, \quad ((a+b) + (a+c) + (b+c)) \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} \right) \geq 9,$$

et en déduire l'inégalité de Nesbitt.

III. *Bonus* : Déterminer à quelle condition sur a, b et c l'inégalité de Nesbitt est une égalité.