

Devoir surveillé n° 1

CORRIGÉ

Exercice 1.

1. L'assertion P se lit : « Pour tous réels a et b , si ab est supérieur ou égal à a , alors a est négatif ou b est supérieur ou égal à 1. »
2. On a directement : $\neg A = (ab < a)$; et, d'après les lois de De Morgan : $\neg B = (a > 0 \wedge b < 1)$.
3. La négation de $A \Rightarrow B$ étant $A \wedge (\neg B)$, on a

$$\neg P : \exists a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R}, (ab \geq a) \wedge (a > 0 \wedge b < 1).$$

4. (a) La contraposée de $A \Rightarrow B$ étant $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$, elle s'écrit :

$$(a > 0 \wedge b < 1) \Rightarrow (ab < a).$$

(b) Oui : Supposons que $a > 0$ et $b < 1$. Alors $a \times b < a \times 1$, et donc $ab < a$.

(c) Oui : Comme la contraposée de $A \Rightarrow B$ est équivalente à $A \Rightarrow B$ et que cette contraposée est vraie, $A \Rightarrow B$ est vraie ; et ceci pour $a, b \in \mathbb{R}$ arbitraires. Donc P est vraie.

Exercice 2.

1. Comme $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$, $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \in \mathbb{Z}$. De plus, $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$, donc $x^2 + \frac{1}{x^2} \in \mathbb{Z}$.

2. On a : $\left(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}\right) \left(x + \frac{1}{x}\right) = x^{n+2} + x^n + \frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{n+2}}$.

3. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on note P_n : « $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $x^0 + \frac{1}{x^0} = 2 \in \mathbb{Z}$, donc P_0 est vraie, et P_1 est vraie par hypothèse.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons P_n et P_{n+1} vraies. Alors $x^n + \frac{1}{x^n}$, $x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}$ et $x + \frac{1}{x}$ sont des entiers, donc, d'après la question 2., $x^{n+2} + \frac{1}{x^{n+2}}$ est un entier. Donc P_{n+2} est vraie.

Donc par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$.

4. On cherche x tel que $x + \frac{1}{x} = k \in \mathbb{Z}$. Or $x + \frac{1}{x} = k \Leftrightarrow x^2 - kx + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2}$ lorsque $k^2 - 4 \geq 0$. Pour $k = 3$ par exemple, $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ conviennent.

Exercice 3.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. L'équation (E_0) est définie en x si et seulement si $x^2 + 4 \in D_{\sqrt{\cdot}} = \mathbb{R}_+$.
Or : $x^2 + 4 \geq 0$, donc (E_0) est définie en x . Donc (E_0) est définie sur $\mathbb{R}$.

On a alors :

$$\begin{aligned}(E_0) &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 4} \leq x + 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 4 \leq (x + 1)^2 \text{ et } x + 1 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 3 \leq 2x \text{ et } x + 1 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2} \text{ et } x \geq -1,\end{aligned}$$

donc l'ensemble S des solutions de (E_0) est l'intervalle : $S = \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. L'équation (E_{-4}) est définie en x si et seulement si $x^2 - 4x + 4 \in D_{\sqrt{\cdot}} = \mathbb{R}_+$.
Or : $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 \geq 0$, donc (E_{-4}) est définie en x . Donc (E_{-4}) est définie sur $\mathbb{R}$.

On a alors :

$$\begin{aligned}(E_{-4}) &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x + 4} \leq x + 1 \\ &\Leftrightarrow |x - 2| \leq x + 1 \\ &\Leftrightarrow (x - 2 \leq x + 1 \text{ et } x - 2 \geq 0) \text{ ou } (-x + 2 \leq x + 1 \text{ et } x - 2 \leq 0) \\ &\Leftrightarrow (-2 \leq 1 \text{ et } x \geq 2) \text{ ou } (2x \geq 1 \text{ et } x \leq 2) \\ &\Leftrightarrow (x \geq 2) \text{ ou } \left(2 \geq x \geq \frac{1}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2},\end{aligned}$$

donc l'ensemble S des solutions de (E_{-4}) est l'intervalle : $S = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. L'équation (E_m) est définie en x si et seulement si $x^2 + mx + 4 \in D_{\sqrt{\cdot}} = \mathbb{R}_+$.
Or : $x^2 + mx + 4 = \left(x + \frac{m}{2}\right)^2 - \frac{m^2}{4} + 4$, donc :

$$x^2 + mx + 4 \geq 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{m}{2}\right)^2 \geq \frac{m^2}{4} - 4 = \frac{m^2 - 16}{4}.$$

Cette dernière assertion est vraie lorsque $m^2 - 16 \leq 0$, c'est-à-dire $m \in [-4, 4]$. Dans ce cas, (E_m) est donc définie sur $\mathbb{R}$. Sinon :

$$\begin{aligned}x^2 + mx + 4 \geq 0 &\Leftrightarrow x + \frac{m}{2} \geq \frac{\sqrt{m^2 - 16}}{2} \text{ ou } x + \frac{m}{2} \leq -\frac{\sqrt{m^2 - 16}}{2} \\ &\Leftrightarrow x \geq \frac{-m + \sqrt{m^2 - 16}}{2} \text{ ou } x \leq \frac{-m - \sqrt{m^2 - 16}}{2},\end{aligned}$$

donc, si $m \notin [-4, 4]$, l'équation (E_m) est définie sur $D = \left]-\infty, \frac{-m - \sqrt{m^2 - 16}}{2}\right] \cup \left[\frac{-m + \sqrt{m^2 - 16}}{2}, +\infty\right[$.

4. D'après la question précédente, l'équation (E_{14}) est définie sur $D = \left]-\infty, -7 - 3\sqrt{5}\right] \cup \left[-7 + 3\sqrt{5}, +\infty\right[$. On a alors : $\forall x \in D$,

$$\begin{aligned}(E_{14}) &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 14x + 4} \leq x + 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 14x + 4 \leq (x + 1)^2 \text{ et } x + 1 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 3 \leq -12x \text{ et } x + 1 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{4} \text{ et } x \geq -1,\end{aligned}$$

donc l'ensemble S des solutions de (E_{14}) est l'intervalle : $S = \left[-1, -\frac{1}{4}\right] \cap D = \left[-7 + 3\sqrt{5}, -\frac{1}{4}\right]$.

Problème.

I. 1. On a :

$$2pq \leq p^2 + q^2 \Leftrightarrow p^2 - 2pq + q^2 \geq 0 \Leftrightarrow (p - q)^2 \geq 0.$$

La dernière assertion est vraie (car le carré d'un réel est toujours positif), donc, par équivalence, l'inégalité voulue est vraie.

2. On applique l'inégalité précédente à $p = x\sqrt{y}$ et $q = \sqrt{y}z$: $2pq = 2xyz \leq p^2 + q^2 = x^2y + yz^2$.

3. On développe le terme de droite :

$$(x + y + z)(xy + yz + xz) = 3xyz + (x^2y + yz^2) + (y^2z + zx^2) + (y^2x + xz^2),$$

donc, d'après la question précédente :

$$(x + y + z)(xy + yz + xz) \geq 3xyz + 3 \times 2xyz = 9xyz.$$

4. On a directement : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{xy + yz + xz}{xyz}$, d'où le résultat.

5. D'après les deux questions précédentes, et comme tous les facteurs sont strictement positifs :

$$H(x, y, z) \leq 3xyz \times \frac{x + y + z}{9xyz} = \frac{x + y + z}{3} = A(x, y, z).$$

6. L'inégalité arithmético-harmonique s'écrit :

$$\frac{3}{\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c}} \leq \frac{(a+b) + (a+c) + (b+c)}{3} = \frac{2}{3}(a+b+c),$$

d'où

$$\frac{9}{2} \leq (a+b+c) \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} \right) = 1 + \frac{c}{a+b} + 1 + \frac{b}{a+c} + 1 + \frac{a}{b+c},$$

d'où

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}.$$

On trouve bien l'inégalité de Nesbitt.

II. 1. La fonction f est polynomiale, donc dérivable sur $[0, 1]$. On a :

$$\forall x \in [0, 1], f'(x) = (1-x)^2 - 2x(1-x) = (1-x)(1-3x).$$

Par conséquent : $\forall x \in [0, 1], f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow (1-x)(1-3x) \geq 0 \Leftrightarrow 1-3x \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$.

La fonction f est donc croissante sur $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$.

2. D'après la question précédente : $\forall s \in [0, 1], s(1-s)^2 \leq f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}$.

3. La fonction g est polynomiale, donc dérivable sur $[0, 1-s]$. On a :

$$\forall t \in [0, 1-s], g'(t) = s(1-s-t) - st = s(1-s-2t).$$

Par conséquent : $\forall t \in [0, 1-s], g'(t) \geq 0 \Leftrightarrow 1-s-2t \geq 0 \Leftrightarrow t \leq \frac{1-s}{2}$.

La fonction g atteint donc un maximum en $t = \frac{1-s}{2}$, de valeur : $g\left(\frac{1-s}{2}\right) = \frac{s(1-s)^2}{4}$.

4. Soient $p, q, r \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $p + q + r = 1$. Notons que, nécessairement, on a $p, q, r \in]0, 1[$.
De plus : $r = 1 - p - q$, donc $pqr = pq(1 - p - q) = g(q)$ pour $s = p$.
Donc, d'après les questions précédentes :

$$pqr \leq \frac{q(1-q)^2}{4} = \frac{f(q)}{4} \leq \frac{1}{4} \times \frac{4}{27} = \frac{1}{27}.$$

5. On a directement : $\frac{xyz}{(x+y+z)^3} \leq \frac{1}{27}$, donc $xyz \leq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$. En passant la racine cubique (ce qui conserve le sens de l'inégalité car la fonction racine cubique est croissante), on obtient l'inégalité arithmético-géométrique.

6. Notons $S = (a+b) + (a+c) + (b+c)$ et $I = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c}$.

L'inégalité arithmético-géométrique appliquée à $x = a+b$, $y = a+c$ et $z = b+c$ s'écrit :

$$(a+b)(a+c)(b+c) \leq \frac{S^3}{27},$$

et l'inégalité arithmético-géométrique appliquée à $x = \frac{1}{a+b}$, $y = \frac{1}{a+c}$ et $z = \frac{1}{b+c}$ s'écrit :

$$\frac{1}{(a+b)(a+c)(b+c)} \leq \frac{I^3}{27}.$$

Donc :

$$\frac{S^3}{27} \geq (a+b)(a+c)(b+c) \geq \frac{27}{I^3},$$

d'où $(SI)^3 \geq 27^2 = 9^3$, et donc $SI \geq 9$. C'est bien la formule voulue.

On a alors : $2(a+b+c) \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} \right) \geq 9$, d'où, comme fait à la question I.6., la formule de Nesbitt.

III. L'inégalité de Nesbitt est une égalité si et seulement si toutes les inégalités prouvées ci-dessus sont des égalités ; par exemple, en reprenant les notations de la partie I., si $2pq = p^2 + q^2$ pour $(p, q) = (x\sqrt{y}, \sqrt{y}z)$ et $(y\sqrt{z}, \sqrt{z}x)$ et $(y\sqrt{x}, \sqrt{x}z)$, où $x = a+b$, $y = a+c$, $z = b+c$.

Or $2pq = p^2 + q^2 \Leftrightarrow (p-q)^2 = 0 \Leftrightarrow p = q$, donc l'inégalité de Nesbitt est une égalité si et seulement si $x = y = z$, c'est-à-dire $a = b = c$.

De même, en reprenant les notations de la partie II., inégalité de Nesbitt est une égalité si et seulement si $p = q = r = \frac{1}{3}$, c'est-à-dire $x = y = z$, c'est-à-dire $a = b = c$.

Cette inégalité a été démontrée en 1902 par le mathématicien australien Alfred Nesbitt (1854-1926).