

Corrigé partiel du T. D. A2 Fonctions d'une variable réelle

8 Étudier les fonctions suivantes.

a. $f(x) = \frac{2 \ln x + 3}{x}$

b. $f(x) = x(x^2 - 1)^2$

c. $f(x) = (x + 1)^2 e^{-x}$

d. $f(x) = (1 + \cos x) \sin x$

e. $f(x) = \cos^2 x - 3 \cos x + 2$

f. $z(x) = x\sqrt{1 - x^2}$

g. $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

h. $f(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$

f. Soit $z(x) = x\sqrt{1 - x^2}$.

Ensemble de définition et réduction.

La fonction z est définie pour tout x tel que $1 - x^2 \geq 0$. Cette condition équivaut à $x^2 \leq 1$ donc à $-1 \leq x \leq 1$. L'ensemble de définition de z est finalement

$$\mathcal{D}_z = [-1, 1].$$

Cet ensemble est symétrique par rapport à 0 et :

$$\forall x \in \mathcal{D}_z \quad z(-x) = -x\sqrt{1 - x^2} = -z(x)$$

Ceci montre que z est impaire. On peut donc restreindre son étude à l'intervalle $[0, 1]$ et obtenir le reste de la courbe par symétrie par rapport à l'origine du repère.

Dérivabilité et dérivée. La fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in]-1, 1[\quad 1 - x^2 > 0$$

Par composition la fonction $x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ est dérivable sur $] -1, 1[$. Par produit avec la fonction $x \mapsto x$ la fonction f est dérivable sur cet ensemble.

On calcule :

$$\forall x \in]-1, 1[\quad f'(x) = \sqrt{1 - x^2} + x \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$$

On cherche la limite du taux d'accroissement de z en $x = 1$:

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x\sqrt{1 - x^2}}{x - 1} = \frac{x(1 - x^2)}{(x - 1)\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x(1 + x)}{\sqrt{1 - x^2}}$$

La dernière écriture montre que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\infty$$

et donc f n'est pas dérivable en $x = 1$.

On peut ajouter qu'elle admet une demi-tangente verticale en ce point.

Variations.

On peut écrire :

$$f'(x) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x^2 \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 \leq \frac{1}{2}$$

On rappelle que l'on a restreint l'étude de f à l'intervalle $[0, 1]$, donc :

$$\forall x \in [0, 1[\quad f'(x) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ainsi f est croissante sur $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$.

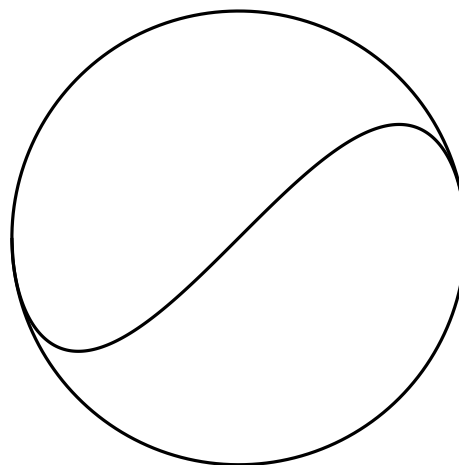
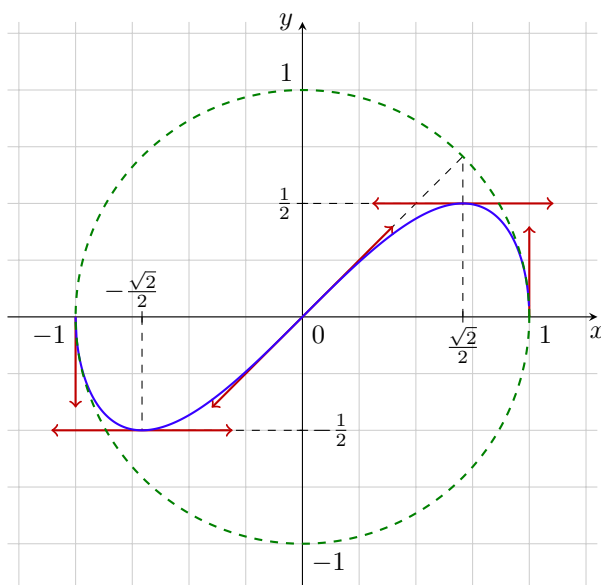
Ceci peut être représenté par le tableau de variations suivant.

x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	
$f'(x)$	1	+	0	–
$f(x)$	$0 \nearrow \frac{1}{2} \searrow 0$			

Tracé.

On obtient un graphique comme ci-dessous.

Le cercle trigonométrique est ajouté comme aide la construction, il permet d'obtenir géométriquement le point de coordonnées $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.



h. Soit $f(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$

Ensemble de définition et réduction.

Le quotient $\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$ est défini si et seulement si $\sin x \neq 1$,

donc si et seulement si $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Son logarithme est défini si et seulement si $\frac{1+\sin x}{1-\sin x} > 0$.

Or on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leq \sin x \leq 1.$$

Ceci montre que :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad 1 + \sin x \geq 0 \quad \text{et} \quad 1 - \sin x \geq 0 \\ \text{donc} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \geq 0. \end{aligned}$$

De plus pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$:

$$\begin{aligned} \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} = 0 &\iff \sin x = -1 \\ &\iff x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Finalement $f(x)$ est défini si et seulement si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

L'ensemble de définition de f est donc :

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Cet ensemble est stable par addition de 2π et comme la fonction sinus est 2π -périodique alors :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \quad f(x + 2\pi) = f(x).$$

Ainsi la fonction f est 2π -périodique. On peut restreindre son étude à $\mathcal{D}_f \cap [-\pi, \pi]$.

L'ensemble $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0. Comme la fonction sinus est impaire alors :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \quad f(-x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin(-x)}{1 - \sin(-x)} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = -\frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} = -f(x).$$

La fonction f est donc impaire. On peut restreindre son étude à :

$$\mathcal{D}_f \cap [0, \pi] = \left[0, \frac{\pi}{2} \right[\cup \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right].$$

Variations.

Par quotient et composition la fonction f est dérivable. Sa dérivée est :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathcal{D}_f \quad f'(x) &= \frac{1}{2} \times \frac{\cos x(1 - \sin x) + (1 + \sin x) \cos x}{(1 - \sin x)^2} \times \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} \\ &= \frac{\cos x}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} \\ &= \frac{1}{\cos x}. \end{aligned}$$

La fonction f' est positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2} \right[$ et négative sur $\left] \frac{\pi}{2}, \pi \right]$.

On en déduit le tableau de variations de f :

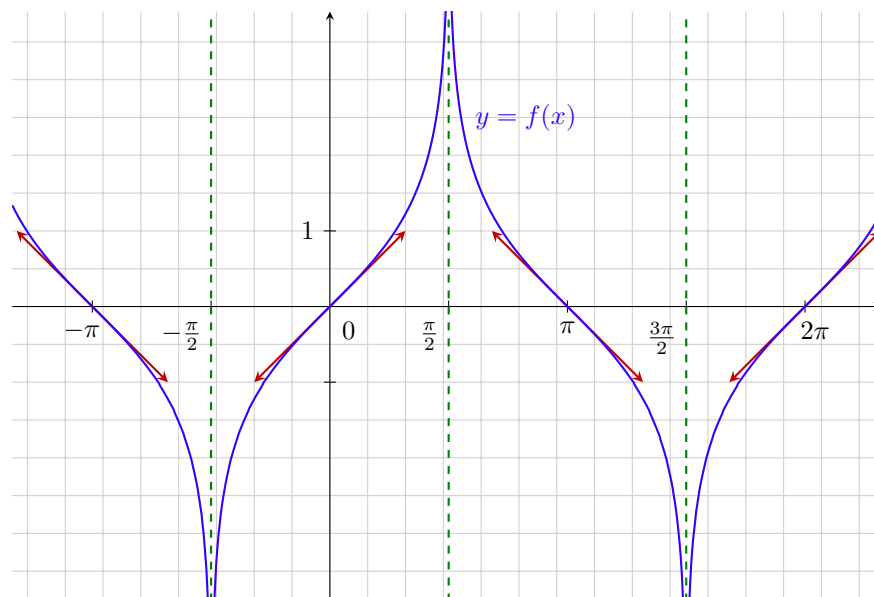
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$f'(x)$	1	+	+
$f(x)$	0	$+\infty$	0

Pour les limites de f en $\frac{\pi}{2}$ on remarque que :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \quad \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} > 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} = +\infty$$

Ainsi par composition : $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty$.

Finalement, en utilisant la parité et la périodicité de f on en déduit la courbe suivante.



11 On définit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$.

- Déterminer les variations et les limites de f .
- Justifier que l'on peut prolonger f par continuité sur $\mathbb{R}_+$.
- On note $\tilde{f} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ le prolongement obtenu.
 Cette nouvelle fonction est-elle dérivable ?
- Tracer l'allure de la courbe représentative de f .

La fonction f est définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = e^{\frac{\ln x}{x}}$$

- Par quotient et composition la fonction f est dérivable, de dérivée :

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} e^{\frac{\ln x}{x}}.$$

Cette dérivée est positive si et seulement si $\ln x \leq 1$, donc si et seulement si $x \leq e$.

Ainsi f est croissante que $]0, e]$ et décroissante que $[e, +\infty[$. Son maximum est atteint en e , de valeur $f(e) = e^{\frac{1}{e}} \simeq 1,445$.

Comme :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{par croissances comparées}$$

alors :

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln x}{x}} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = 1$$

Ainsi les limites de f en 0 et $+\infty$ sont respectivement 0 et 1.

- b. La limite de f en 0 est 0. Comme cette limite est finie alors on peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.
- c. La fonction $\tilde{f}$ est définie par :

$$\tilde{f} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} e^{\frac{\ln x}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On sait déjà que cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On étudie sa dérivabilité en 0, en calculant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x - 0} = \frac{e^{\frac{\ln x}{x}}}{x} = e^{\ln x \frac{1-x}{x}}$$

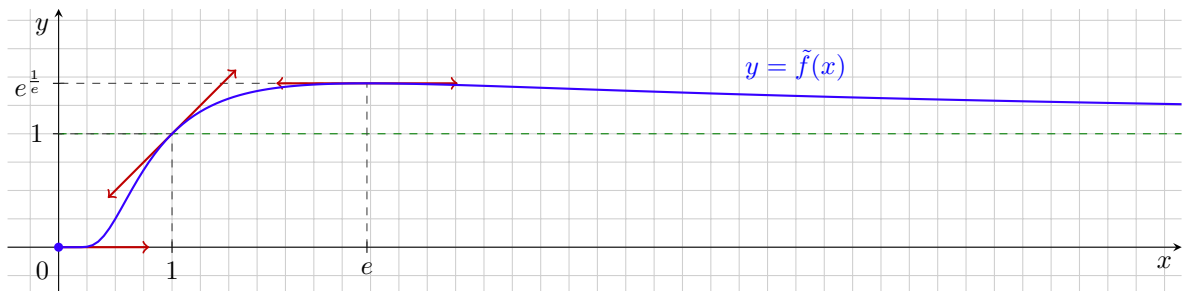
On en déduit :

$$\frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

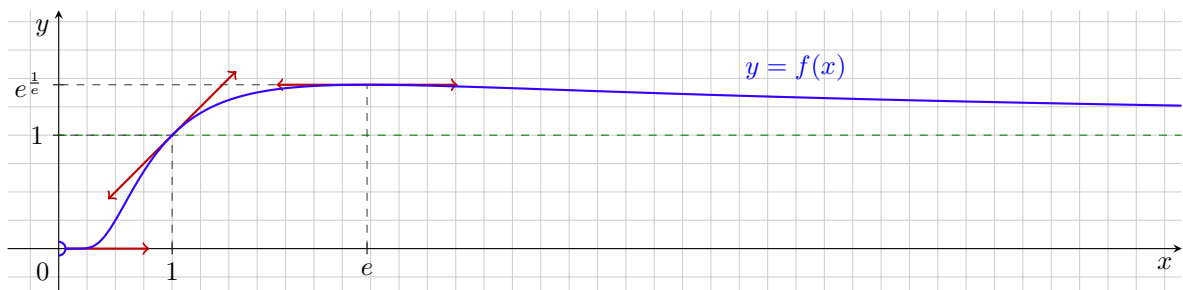
Ceci montre que la fonction $\tilde{f}$ est dérivable en 0, de dérivée $\tilde{f}'(0) = 0$.

Ceci permet de tracer correctement l'allure de la courbe de $\tilde{f}$ au voisinage de 0, puis celle de f qui est sa restriction à $\mathbb{R}_+^*$, en enlevant le point d'abscisse 0.

Le courbe de $\tilde{f}$ est :



On peut donc tracer celle de f :



13 On note :

$$f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x+3} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x+3}{x+1} - \ln(x+1)$$

a. Étudier la fonction g .

Démontrer qu'elle s'annule en un unique point α et donner un encadrement de α d'amplitude 1.

b. Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1}$.

c. Étudier la fonction f .

On donne $\ln 2 \simeq 0,7$ et $\ln 5 \simeq 1,6$.

a. La fonction g est définie sur $] -1, +\infty[$.

Par somme et quotient elle est dérivable et :

$$\forall x \in] -1, +\infty[\quad g'(x) = \frac{-2}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} = -\frac{x+3}{(x+1)^2}.$$

Cette dérivée est strictement négative sur $] -1, +\infty[$, donc g est strictement décroissante.

Pour calculer sa limite en -1 on remarque que $x+1 > 0$ si $x > -1$, donc :

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+3}{x+1} = +\infty.$$

De plus $\lim_{x \rightarrow -1} \ln(x+1) = -\infty$ donc par somme : $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = +\infty$.

Pour la limite de g en $+\infty$ on écrit : $g(x) = \frac{1+\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}} - \ln(x+1)$.

Ceci montre que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

La fonction g est continue et strictement décroissante donc d'après le théorème de la bijection elle réalise une bijection de $] -1, +\infty[$ dans $] -\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

Comme $0 \in \mathbb{R}$ alors il admet un et un seul antécédent par g : il existe un unique $\alpha \in] -1, +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

Comme g est strictement décroissante on peut ajouter :

$$\forall x \in] -1, +\infty[\quad g(x) > 0 \iff x < \alpha \quad \text{et} \quad g(x) < 0 \iff x > \alpha.$$

On calcule $g(3) = \frac{3}{2} - 2 \ln 2 \simeq 0,1$, cette valeur est positive donc $3 < \alpha$.

On calcule $g(4) = \frac{7}{5} - \ln 5 \simeq -0,2$, cette valeur est négative donc $4 > \alpha$.

On en déduit $3 < \alpha < 4$, ce qui est un encadrement de α d'amplitude 1.

b. Comme $g(\alpha) = 0$ alors

$$\frac{\alpha+3}{\alpha+1} = \ln(\alpha+1).$$

Ceci donne :

$$f(\alpha) = \frac{\ln(\alpha+1)}{\alpha+3} = \frac{1}{\alpha+1}.$$

c. La fonction f est définie sur $I =] -1, +\infty[$. En effet pour x appartenant à cet intervalle on a $x+1 > 0$ et $x+3 \neq 0$.

Par composition et quotient la fonction f est dérivable et :

$$\forall x \in I \quad f'(x) = \left(\frac{x+3}{x+1} - \ln(x+1) \right) \frac{1}{(x+3)^2} = \frac{g(x)}{(x+3)^2}.$$

Ceci montre que $f'(x)$ est du signe de $g(x)$, donc f' est positive sur $] -1, \alpha[$ et négative sur $] \alpha, +\infty[$.

La limite de f en -1 n'est pas indéterminée : $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$.

Pour la limite de f en $+\infty$ on écrit :

$$\forall x \in I \quad f(x) = \frac{\ln \left[x \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]}{x \left(1 + \frac{3}{x} \right)} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{1 + \frac{3}{x}} + \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{x + 3}.$$

Par croissances comparées on sait : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

On en déduit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

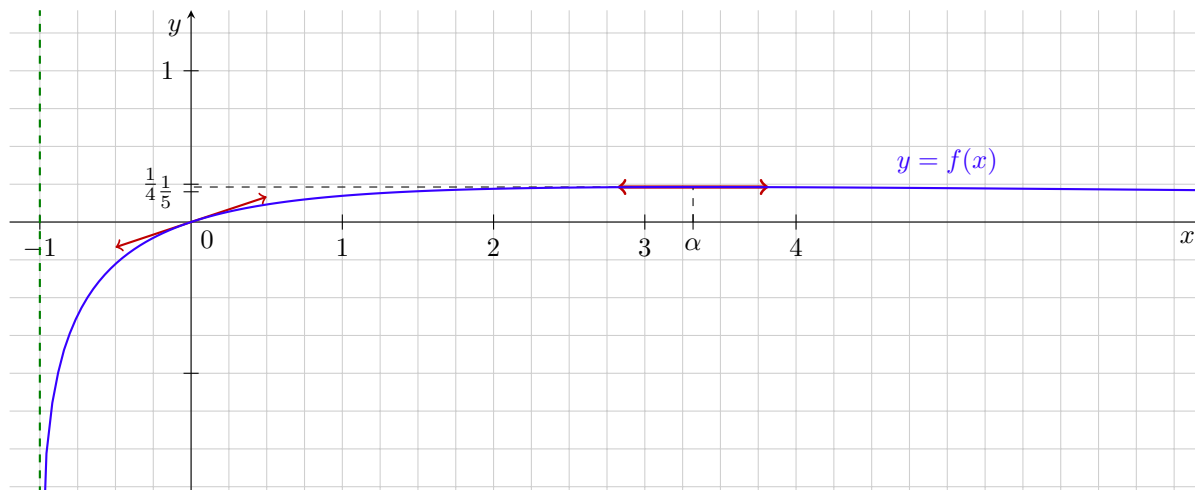
Le tableau de variations de f est :

x	-1	α	$+\infty$
$f'(x)$		$+$ 0 $-$	
$f(x)$		$-\infty$ $\nearrow$ $f(\alpha)$ $\searrow$ 0	

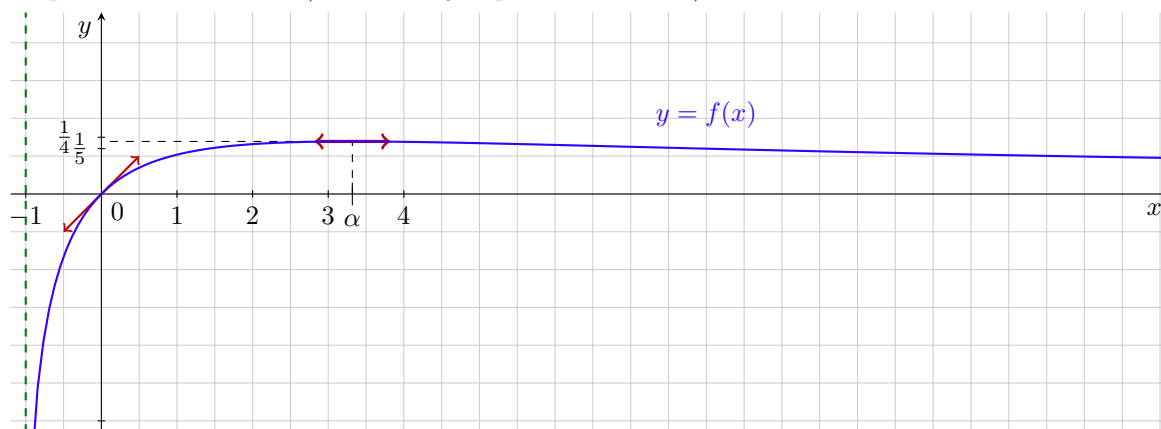
Comme $3 < \alpha < 4$ alors $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1}$ alors $\frac{1}{5} < f(\alpha) < \frac{1}{4}$.

On calcule $f(0) = 0$ et $f'(0) = \frac{1}{3}$.

On obtient une courbe comme la suivante :



En repère non orthonormé (échelle des y triple de celle des x) :



14 On pose $f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$.

a. Donner l'ensemble de définition de f , étudier ses variations et ses limites.

b. Soit g la restriction de f à $\mathbb{R}_+^*$.

Justifier que g est prolongeable par continuité à $\mathbb{R}_+$ et étudier la dérivabilité en 0 de ce prolongement.

c. Démontrer que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe de f en $\pm\infty$.

Déterminer la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

d. Représenter l'allure de la courbe de f ainsi que ses asymptotes.

Note. Cet exercice utilise les propriétés :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1 \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad e^t \geq 1 + t$$

La première traduit le fait que la fonction exponentielle est dérivable en 0 de dérivée 1, la seconde est conséquence de sa convexité.

a. La fonction f est définie en tout x non-nul, donc sur $\mathbb{R}^*$.

Elle est dérivable par composition et produit. Sa dérivée est :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{x+1}{x} e^{-\frac{1}{x}}$$

Cette dérivée est du signe de $\frac{x+1}{x}$. Un tableau de signe montre qu'elle est négative sur $[-1, 0[$ et positive sur $] -\infty, -1] \cup]0, +\infty[$.

Comme $-\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$ et $f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$ alors par composition et produit de limites :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty \quad \text{et} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Comme $-\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$ alors de même : $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$

Pour la limite en 0 par valeurs inférieures on utilise le changement de variable $y = -\frac{1}{x}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} xe^{-\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} -\frac{e^y}{y}$$

Par croissances comparées cette limite est égale à $-\infty$ donc : $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} -\infty$.

Finalement on peut tracer le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$-e$	0	$+\infty$

b. On sait que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$. Cette limite est finie donc on prolonge par continuité la fonction g en posant $g(0) = 0$.

On calcule, pour tout $x > 0$:

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = e^{-\frac{1}{x}}$$

On en déduit :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 0$$

Ceci montre que la fonction g est dérivable en 0 de dérivée $g'(0) = 0$.

c. On calcule :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) - (x - 1) = x \left(e^{-\frac{1}{x}} - 1 \right) + 1.$$

En posant $t = -\frac{1}{x}$ on obtient :

$$f(x) - (x - 1) = -\frac{1}{t} (e^t - 1) + 1 = 1 - \frac{e^t - 1}{t}$$

Comme $\frac{e^t - 1}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1$ alors :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (x - 1)) = 1 - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 0.$$

La droite d'équation $y = x - 1$ est donc asymptote à la courbe de f en $\pm\infty$.

Le calcul précédent donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) - (x - 1) = x \left(e^{-\frac{1}{x}} - 1 + \frac{1}{x} \right)$$

On sait que pour tout $t \in \mathbb{R}$: $e^t \geq 1 + t$. On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad e^{-\frac{1}{x}} \geq 1 - \frac{1}{x} \quad \text{puis} \quad e^{-\frac{1}{x}} - 1 + \frac{1}{x} \geq 0$$

Ainsi :

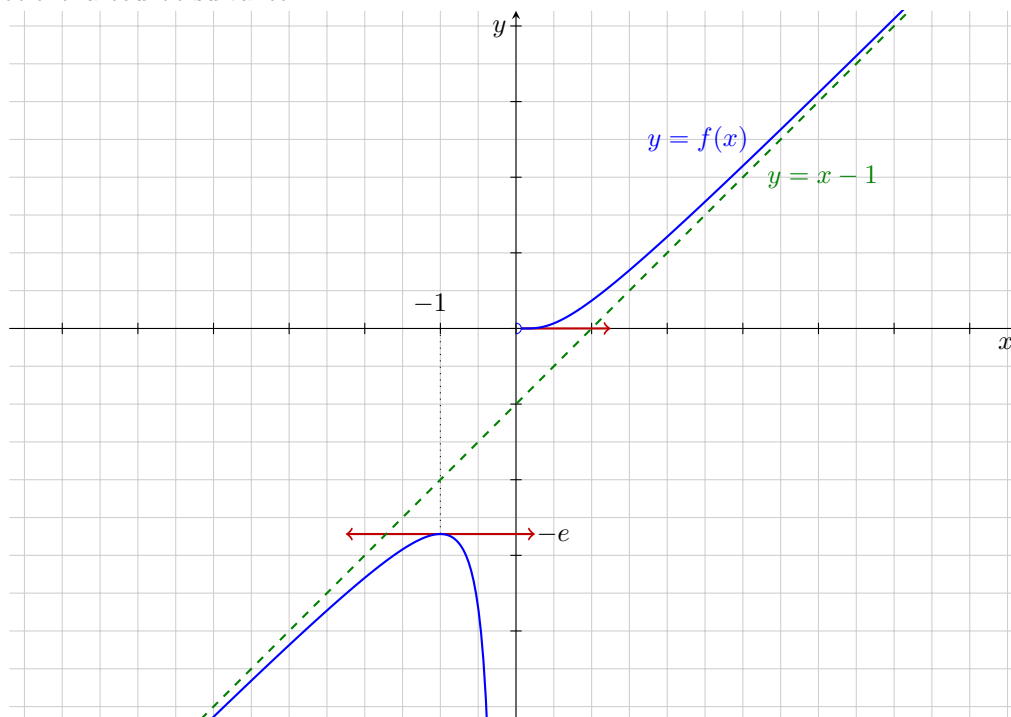
$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \begin{cases} f(x) - (x - 1) \geq 0 & \text{si } x > 0 \\ f(x) - (x - 1) \leq 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ceci montre que la courbe représentative de f est au-dessus de l'asymptote d'équation $y = x - 1$ si $x > 0$ et en-dessous si $x < 0$.

d. La courbe de f admet deux asymptotes : une asymptote oblique d'équation $y = x - 1$ en $\pm\infty$, comme nous venons de le voir, et une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

On calcule $f(-1) = -e$.

On obtient la courbe suivante.



15 Démontrer les inégalités suivantes.

- a. $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln x \leq \sqrt{x}$
 b. $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} \quad 0 < \frac{x \ln x}{x^2 - 1} < \frac{1}{2}$
 c. $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad (x+1)^{x+1} \geq (x+2)^x.$

a. Soit $f : x \mapsto \sqrt{x} - \ln x$.

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, dérivable de dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x} - 2}{2x}$$

Elle est décroissante sur $]0, 2]$ et croissante sur $[2, +\infty[$.

Ainsi elle atteint son minimum en 4, de valeur $2(1 - \ln 2)$ qui est positif.

Ceci montre que f est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln x < \sqrt{x}$$

b. On peut écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} \quad \frac{x \ln x}{x^2 - 1} = \frac{x}{x+1} \times \frac{\ln x}{x-1}$$

Le quotient $\frac{x}{x+1}$ est positif sur $\mathbb{R}_+^*$, et la fonction $\ln$ est du même signe que $x - 1$, ce qui montre que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} \quad \frac{x}{x+1} \times \frac{\ln x}{x-1} > 0.$$

Pour la majoration il faut poser

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad g(x) = \ln x - \frac{x^2 - 1}{2x}$$

Ceci pour isoler le logarithme, ce qui simplifie les calculs.

Cette fonction est dérivable de dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad g'(x) = -\frac{(x-1)^2}{2x}$$

Cette dérivée est strictement négative sauf en 1 où elle s'annule donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Comme $g(1) = 0$ alors g est strictement positive sur $]0, 1[$ et strictement négative sur $]1, +\infty[$.

Si $x \in]0, 1[$ alors $x^2 - 1$ est strictement négatif donc par équivalences :

$$\forall x \in]0, 1[\quad g(x) > 0 \iff \ln x > \frac{x^2 - 1}{2x} \iff \frac{x \ln x}{x^2 - 1} < \frac{1}{2}$$

Si $x \in]1, +\infty[$ alors $x^2 - 1$ est strictement positif donc par équivalences :

$$\forall x \in]1, +\infty[\quad g(x) < 0 \iff \ln x < \frac{x^2 - 1}{2x} \iff \frac{x \ln x}{x^2 - 1} < \frac{1}{2}$$

Finalement on a démontré :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} \quad 0 < \frac{x \ln x}{x^2 - 1} < \frac{1}{2}$$

c. Il faut démontrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f(x) \geq 0 \quad \text{où} \quad f(x) = (x+1) \ln(x+1) - x \ln(x+2).$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f'(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) + \frac{2}{x+2}.$$

On remarque :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f'(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{x+2}\right) + \frac{2}{x+2}.$$

Posons :

$$h(t) = \ln(1-t) + 2t$$

Si $x \in \mathbb{R}_+$ alors $\frac{1}{x+2} \in]0, \frac{1}{2}]$. On étudie donc le signe de h sur l'intervalle $]0, \frac{1}{2}]$.

La fonction h est dérivable, de dérivée :

$$\forall t \in]0, \frac{1}{2}] \quad h'(t) = \frac{1-2t}{1-t}$$

Celle-ci est positive sur $]0, \frac{1}{2}]$, donc h est croissante.

Comme $h(0) = 0$ alors h est positive sur $]0, \frac{1}{2}]$, puis f' est positive sur $\mathbb{R}_+$ donc f est croissante.

Comme $f(0) = 0$ alors f est positive sur $\mathbb{R}_+$.

16 Identifier les graphes des fonctions suivantes :

$f_1(x) = 1 - x$	$f_2(x) = 2x$	$f_3(x) = x^2$	$f_4(x) = x^3$	$f_5(x) = \sqrt{x}$
$f_6(x) = \frac{1}{x}$	$f_7(x) = (x+1)(3-x)$	$f_8(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$	$f_9(x) = x $	
$f_{10}(x) = \sqrt{1-x^2}$	$f_{11}(x) = e^x$	$f_{12}(x) = \ln x$	$f_{13}(x) = \cos x$	$f_{14}(x) = \sin x$

Note : tous les repères sont orthonormés.

On remarque que :

- La fonction f_7 est une parabole orientée vers le bas, coupant l'axe des abscisses aux points d'abscisses -1 et 3 .
- La fonction f_8 est une courbe du quatrième degré, coupant l'axe des abscisses aux points d'abscisses $0, 1, 2$ et 3 .

On peut démontrer que la courbe de la fonction f_{10} est un demi-cercle.

