

Feuille d'exercices 3

ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Exercice 2.

- $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$, donc f est paire.
- $\forall y \in \mathbb{R}, g(-y) = \frac{2 \times (-y)}{1 + (-y)^2} = -\frac{2y}{1 + y^2} = -g(y)$, donc g est impaire.
- $\forall x \in \mathbb{R}, h(-x) = \sin^2(-x) = (-\sin(x))^2 = \sin^2(x) = h(x)$, donc h est paire.
De plus : $\forall x \in \mathbb{R}, h(x + \pi) = \sin^2(x + \pi) = (-\sin(x))^2 = \sin^2(x) = h(x)$, donc h est π -périodique.
- $\forall t \in D, i(-t) = \frac{1}{\cos(-2t)} = \frac{1}{\cos(2t)} = i(t)$, donc i est paire.
De plus : $\forall t \in \mathbb{R}, i(t + \pi) = \frac{1}{\cos(2(t + \pi))} = \frac{1}{\cos(2t)} = i(t)$, donc i est π -périodique.

Exercice 3. La courbe de g est obtenue à partir de celle de f par dilatation de facteur -1 verticalement (c'est-à-dire par symétrie selon l'axe Ox) puis par translation de 2 unités verticalement.

Exercice 4.

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$x \in D_g \Leftrightarrow \frac{x}{2} \in D_f \Leftrightarrow -1 \leq \frac{x}{2} \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 4,$$

donc $D_g = [-2, 4]$.

(b) La courbe de g est obtenue à partir de celle de f par deux dilatations, toutes deux de facteur 2, selon l'axe (Ox) et selon l'axe (Oy) .

Exercice 6.

- (a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto -e^{-x}$
- (b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{1}{1+e^{-x}}$ (il s'agit d'une *sigmoïde*)
- (c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 0$, la fonction constante égale à 0, est la seule qui convient.
- (d) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 0$ (les fonctions qui conviennent sont exactement les fonctions constantes)
- (e) $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \ln |x|$

Exercice 8. Comme f_a est paire, la courbe de f a pour axe de symétrie l'axe $x = a$.

Comme f_b est impaire, la courbe de f a pour centre de symétrie le point $(b, 0)$.

Notons $\delta = b - a$. La courbe de f a alors pour axe de symétrie « inversé » l'axe $x = b + \delta$, puis pour centre de symétrie « inversé » le point $(b + 2\delta, 0)$, puis pour axe de symétrie « non inversé » l'axe $x = b + 3\delta$.

La fonction f est ainsi périodique de période $b + 3\delta - a = 4\delta = 4(b - a)$.

Exercice 9. On procède par analyse-synthèse. Supposons qu'il existe f solution. On dérive selon $x : \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f'(x + y) = f'(x)$. Par conséquent, f' est constante, donc f est affine. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = ax + b$. Alors : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, a(x + y) + b = ax + b + ay + b$, donc $2b = b$, donc $b = 0$. Donc f est linéaire. Réciproquement, si f est linéaire, alors f est solution.

Exercice 10.

(a) Supposons f paire. Alors : $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$, donc, en dérivant : $-f'(-x) = f'(x)$, donc f' est impaire.

La réciproque est vraie : supposons f' impaire, alors : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(-x) = -f'(x)$, donc $f(-x) = f(x) + c$. En particulier, $f(0) = f(0) + c$, donc $c = 0$, donc f est paire.

(b) Supposons f impaire. Alors : $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)$, donc, en dérivant : $-f'(-x) = -f'(x)$, donc f' est paire.

La réciproque est fausse, par exemple pour $f : x \mapsto x^3 + 1 : f'$ est paire, mais f n'est pas impaire.

(c) À nouveau : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)$, donc, en dérivant : $f'(x+T) = f'(x)$, donc f' est T -périodique.

Exercice 11.

- $D_i = D'_i = \mathbb{R}. \forall x \in D'_i, i'(x) = -\frac{x^2 + 2x + 2}{(x^2 + 3x + 1)^2}.$
- $D_j = D'_j = \mathbb{R} \setminus \{-3\}. \forall x \in D'_j, j(x) = x - 2$ donc $j'(x) = 1.$
- $D_k = D'_k = \left] \frac{1}{5}, +\infty \right[. \forall x \in D'_k, k'(x) = -\frac{5}{5x - 1}.$
- $D_l = D'_l = \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z} \right). \forall x \in D'_l, l'(x) = \frac{3 \cos(x) \cos(2x) + 6 \sin(x) \sin(2x)}{\cos^2(2x)}.$
- $D_m = \mathbb{R}, D'_m = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}. \forall x \in D'_m, m'(x) = \frac{2x - 3}{2\sqrt{|x^2 - 3x + 2|}}$ si $x \in]1, 2[$, $\frac{-2x + 3}{2\sqrt{|x^2 - 3x + 2|}}$ sinon.
- $D_n = D'_n = \mathbb{R}_+^*. \forall x \in D'_n, n'(x) = (1 + \ln(x)) x^x.$
- $D_p = [0, 2[, D'_p =]0, 2[. \forall x \in D'_p, p'(x) = \frac{\frac{2-2x}{(2-x)^2}}{2\sqrt{\frac{x}{2-x}}} = \frac{(1-x)}{\sqrt{x}(2-x)^{\frac{3}{2}}}.$
- $D_q = D'_q = \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \right). \forall x \in D'_q, q'(x) = \left(\tan(x) + \frac{x}{\cos^2(x)} \right) e^{x \tan x}.$
- $D_r = D'_r =]0, e[\cup]e, +\infty[. \forall x \in D'_r, r'(x) = \frac{2xe^{x^2}(\ln(x) - 1) - \frac{e^{x^2}}{x}}{(\ln(x) - 1)^2} = \frac{2x^2e^{x^2}(\ln(x) - 1) - e^{x^2}}{x(\ln(x) - 1)^2}.$

Exercice 12.

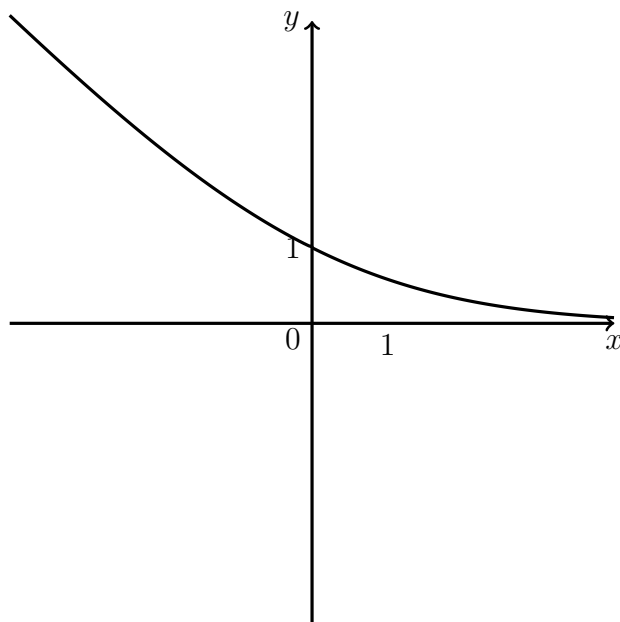
- $D_h = D'_h = \mathbb{R}^*. \forall x \in D'_h, h'(x) = \frac{(1-x)e^x - 1}{(e^x - 1)^2}.$

On pose $g : x \mapsto (1-x)e^x - 1$, alors g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = -xe^x \leq 0$ si $x \geq 0$, ≥ 0 si $x \leq 0$. Donc g admet un maximum en 0 égal à $g(0) = 0$, donc g est négative sur $\mathbb{R}$.

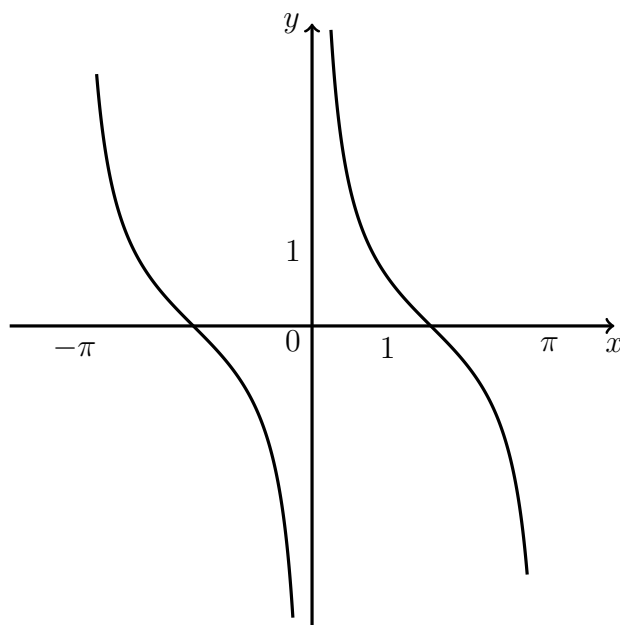
Donc : $\forall x \in D'_h, h'(x) \leq 0$. Donc h est décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) =$

1, donc h est prolongeable par continuité en 0 par $h(0) = 1$; donc h est décroissante sur $\mathbb{R}$. Enfin :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$.



- Notons $f = \cotan$. $D_f = D'_f = \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Comme f est π -périodique, on l'étudie sur $]0, \pi[$. $\forall x \in]0, \pi[$, $f'(x) = \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{\sin^2(x)} < 0$, donc f est décroissante sur $]0, \pi[$. On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = -\infty$.



Exercice 13.

- (a) Soit $f : x \mapsto \ln(1+x)$. La fonction f est définie sur $] -1, +\infty[$ et dérivable deux fois sur le même intervalle. On a : $\forall x > -1$, $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} < 0$, donc f est concave, donc est en-dessous de sa tangente en 0, à savoir la droite d'équation cartésienne $y = f'(0)(x-0) + f(0) = x$. Donc : $\forall x > -1$, $f(x) \leq x$.
- (b) On applique la formule précédente à $x = \pm \frac{a}{n} > -1$: $\ln\left(1 + \frac{a}{n}\right) \leq \frac{a}{n}$, donc $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \leq e^a$, et de même $\ln\left(1 - \frac{a}{n}\right) \leq -\frac{a}{n}$, donc $e^a \leq \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{-n}$.

Exercice 14.

- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g'(x) = (n-1)x^{n-2} \ln(x) + x^{n-2}$,
 $g^{(2)}(x) = (n-1)(n-2)x^{n-3} \ln(x) + (2n-3)x^{n-3}$,
 et plus généralement : $\forall k \leq n-1, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, g^{(k)}(x) = a_k x^{n-1-k} \ln(x) + b_k x^{n-1-k}$, avec : $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$, et : $a_{k+1} = (n-1-k)a_k$ et $b_{k+1} = a_k + (n-1-k)b_k$.
 On a alors : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{x}$, puis : $\forall k \geq n, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, g^{(k)}(x) = (-1)^{k-n} \frac{(n-1)!(k-n)!}{x^{k-n+1}}$,
- $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \frac{3}{4} \sin(x) - \frac{1}{4} \sin(3x)$, donc $h^{(n)}(x) = \frac{3}{4} \sin^{(n)}(x) - \frac{3^n}{4} \sin^{(n)}(3x)$.

Exercice 16. $f : x \mapsto x + \sin(x)$ est usuellement dérivable sur $\mathbb{R}$, avec : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 1 + \cos(x) \geq 0$, $= 0 \forall x \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$. Donc f' est strictement positive, sauf en des points isolés, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus f est continue (car dérivable), donc, d'après le théorème de la bijection continue, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Exercice 17.

- (a) La fonction $f : x \mapsto \sqrt{2x+3} - 1$ est, par translation et dilatation de la fonction $\sqrt{\cdot}$ (qui est usuellement bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$), bijective de $\left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[$ dans $[-1, +\infty[$.
- (b) On vérifie que la fonction $g : x \mapsto \frac{e^x + 2}{e^{-x}}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
 On a : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{e^x e^{-x} - (e^x + 2) \times (-e^{-x})}{e^{-2x}} = 2e^x(1 + e^x) > 0$.
 La fonction g est donc strictement croissante et continue (car dérivable) sur $\mathbb{R}$. Donc, d'après le théorème de la bijection, g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $g(\mathbb{R}) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right[=]0, +\infty[$.
- (c) On vérifie que la fonction $h : x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$.
 On a : $\forall x < 0, h(x) = \frac{x}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x}$, donc $h'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} > 0$,
 et : $\forall x > 0, h(x) = \frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$, donc $h'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$,
 et, de plus, la fonction h est continue en 0 ; elle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
 Comme la fonction h est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$ (car continue en 0 et dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$), d'après le théorème de la bijection continue, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $h(\mathbb{R}) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \right[=]-1, 1[$.

Exercice 18.

- (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Le nombre $f(x)$ est défini lorsque $\frac{e^x + 1}{e^x - 1} > 0$, c'est-à-dire ($e^x + 1 > 0$ et $e^x - 1 > 0$) ou ($e^x + 1 < 0$ et $e^x - 1 < 0$), c'est-à-dire ($x > 0$) ou (impossible). Donc $D_f = \mathbb{R}_+^*$.
 Par un calcul direct : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(f(x)) = \ln \left(\frac{\frac{e^x + 1}{e^x - 1} + 1}{\frac{e^x + 1}{e^x - 1} - 1} \right) = \ln \left(\frac{2e^x}{2} \right) = x$, donc $f \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}_+^*}$.
- (b) Comme $f \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}_+^*}$, f est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, de réciproque $f^{-1} = f$: la fonction f est une *involution*.

Exercice 19. Comme la fonction u n'est pas continue (en aucun point de $[0, 1]$!) ni monotone, on ne peut pas appliquer le théorème de la bijection. On revient donc à la définition d'une bijection :
 Soit $y \in [0, 1]$. On veut montrer que y admet exactement un antécédent dans $[0, 1]$ par u . Soit $x \in [0, 1]$. Par disjonction de cas :

- si $x, y \in \mathbb{Q}$, alors $y = u(x) \Leftrightarrow y = x \Leftrightarrow x = y$,
- si $y \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$, alors $y = u(x) \Leftrightarrow y = 1 - x$, ce qui est impossible (car $y \in \mathbb{Q}$ et $1 - x \notin \mathbb{Q}$),
- si $y \notin \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{Q}$, alors $y = u(x) \Leftrightarrow y = x$, ce qui est impossible (car $y \notin \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{Q}$),
- si $x, y \notin \mathbb{Q}$, alors $y = u(x) \Leftrightarrow y = 1 - x \Leftrightarrow x = 1 - y$,

donc :

- si $y \in \mathbb{Q}$, alors y a exactement un antécédent par u , qui est y ,
- si $y \notin \mathbb{Q}$, alors y a exactement un antécédent par u , qui est $1 - y$.

Donc, dans tous les cas, y a exactement un antécédent par u . Donc u est bijective. Par construction, on a :

$$\forall y \in [0, 1], u^{-1}(y) = \begin{cases} y & \text{si } y \in \mathbb{Q} \\ 1 - y & \text{sinon} \end{cases},$$

c'est-à-dire que $u^{-1} = u$.

Exercice 20. Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction impaire et bijective. Montrer que f^{-1} est impaire. A-t-on un énoncé analogue pour une fonction paire ? Soit $y \in F$, soit $x = f^{-1}(y)$. Alors $y = f(x)$, donc $f(-x) = -f(x) = -y$, donc $-x = f^{(-1)}(-y)$, donc $f^{(-1)}(-y) = -f^{-1}(y)$. Donc $f^{(-1)}$ est impaire.

Dans le cas où f est paire, on a : $\forall x \in E, f(-x) = f(x)$, donc, comme f est injective, $x = -x$, donc $x = 0$, donc $E = \{0\}$. Il existe donc $c \in \mathbb{R}$ tel que $f : \{0\} \rightarrow \{c\}$ (f est donc définie par $f(0) = c$). Sa réciproque (définie par $f^{(-1)}(c) = 0$) est alors impaire si et seulement si $c = 0$.