

C. Racines n -èmes

Rappel : racines n -èmes dans $\mathbb{R}$.

- Soit a un réel non-nul.
 - Si n est impair alors l'équation $x^n = a$ admet une unique solution.
 - Si n est pair alors elle en admet deux si a est positif et aucune si a est négatif.

En effet, si n est impair alors la fonction $x \mapsto x^n$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, comme $x \mapsto x^3$ par exemple.

Par contre si n est pair alors la fonction $x \mapsto x^n$ est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$.

- Soit a un réel positif.
 - Alors l'équation $x^n = a$ admet une et une seule solution positive.

On appelle celle-ci *racine n -ème de a* et on la note $\sqrt[n]{a}$.

En effet, quelque soit la parité de n , la fonction $x \mapsto x^n$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.

Proposition

Soit n un entier naturel non nul ($n \in \mathbb{N}^*$).

Alors tout complexe non-nul admet exactement n racines n -èmes distinctes.

Démonstration. Soit $a = re^{i\theta}$. On pose $b = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta}{n}}$. Alors $b^n = a$, donc b est une racine n -ème de a . Ensuite par équivalences :

$$\begin{aligned} z^n = a &\iff z^n = b^n &\iff \left(\frac{z}{b}\right)^n = 1 \\ &&\iff \frac{z}{b} \in \mathbb{U}_n &\iff z = b\zeta \text{ où } \zeta \in \mathbb{U}_n \end{aligned}$$

Ceci montre que les racines n -èmes de a sont les complexes $b\zeta$ où ζ est une racine n -ème de l'unité. Les racines n -èmes de a sont donc au nombre de n . $\square$

Méthode. Obtenir les racines n -èmes de $a \in \mathbb{C}^*$

- Déterminer la forme exponentielle $a = re^{i\theta}$.
- En déduire une première racine n -ème : $b = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta}{n}}$.
- Les racines n -èmes de a sont les complexes $b\zeta$ où $\zeta \in \mathbb{U}_n$.

Exemple 8. Résoudre l'équation : $z^3 = 8i$

L'équation s'écrit :

$$z^3 = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$$

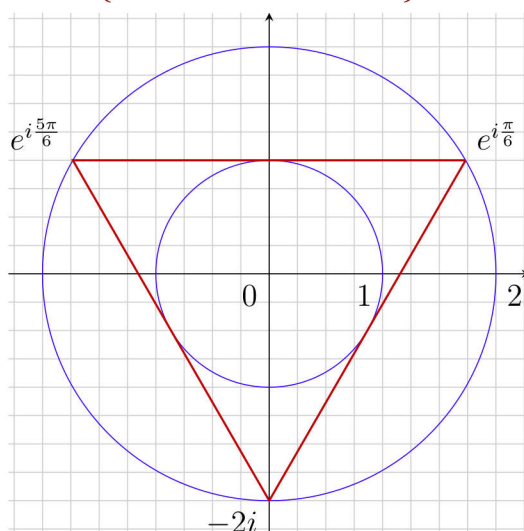
Une racine troisième de $8e^{i\frac{\pi}{2}}$ est $2e^{i\frac{\pi}{6}}$, donc :

$$z^3 = 8e^{i\frac{\pi}{2}} \iff z^3 = (2e^{i\frac{\pi}{6}})^3 \iff z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}\zeta \quad \text{où } \zeta \in \mathbb{U}_3$$

On sait que $\mathbb{U}_3 = \{1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}\}$, donc les solutions sont :

$$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \quad z_2 = 2e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3})} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} \quad z_3 = 2e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3})} = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

Soit sous forme algébrique $\mathcal{S} = \{\sqrt{3} + i, -\sqrt{3} + i, -2i\}$.



Remarque. Les solutions forment encore un polygone régulier à n côtés, mais en général il n'est pas inscrit dans le cercle trigonométrique.

► **Exercice 11.** Résoudre l'équation : $32z^4 = \sqrt{3}i - 1$

IV. L'exponentielle complexe

Définition

Soit $z = x + iy$ un complexe, avec x et y réels. On note

$$e^z = e^x e^{iy}$$

et on appelle *exponentielle* de z ce complexe.

La fonction $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ainsi définie est appelée *exponentielle complexe*.

$$z \mapsto e^z$$

Propositions

- Pour tout $z \in \mathbb{C} : e^z \neq 0$
- Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2 : e^{z+z'} = e^z e^{z'}$ et $e^{z-z'} = \frac{e^z}{e^{z'}}$
- Pour tout $z \in \mathbb{C} : \overline{e^z} = e^{\overline{z}}$
- Pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C} : |e^z| = e^x$ et $\arg(e^z) = y$

Cette dernière proposition montre que la forme algébrique de z donne la forme exponentielle de e^z .

Démonstration. Laissée en exercice. □

Proposition

Tout complexe non-nul possède un antécédent par l'application exponentielle.
En d'autres termes l'application $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ est *surjective*.

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors on peut écrire $z = re^{i\theta}$ avec r strictement positif, donc $z = e^a$ avec $a = \ln r + i\theta$. □

Remarque. Soit z et z' deux complexes.

Alors $e^z = e^{z'}$ si et seulement si il existe un entier k tel que $z = z' + 2ik\pi$.

Ceci montre que l'on n'a pas unicité de l'antécédent : l'application n'est pas *injective*, i.e., l'égalité $e^z = e^{z'}$ n'implique pas que $z = z'$.

On ne peut donc pas facilement définir de logarithme complexe.

► Exercice 12. Résoudre les équations

- $e^z = \sqrt{3} + i$
- $e^{iz\pi} = 1 - i$
- $e^{1-z} + e^z = \sqrt{2}e$