

Corrigé partiel du T. D. B2 Nombres complexes

⑨ Résoudre les équations suivantes :

a. $z^2 - (1 + 2i)z - 1 + i = 0$

b. $z^2 - iz - 1 = 0$

c. $z^2 - (1 + i)z + 2 + 2i = 0$

d. $z + \frac{1}{z} = i\left(\frac{3}{z} - 1\right)$

e. $\begin{cases} z_1 + z_2 = 6i \\ z_1 z_2 = -13 \end{cases}$

f. $z^2 + z - i = 0$

- a. $\Delta = 1$ $\mathcal{S} = \{i, 1 + i\}$
 b. $\Delta = 3$ $\mathcal{S} = \{e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{5\pi}{6}}\}$
 c. $\Delta = -8 - 6i = (1 - 3i)^2$ $\mathcal{S} = \{2i, 1 - i\}$
 d. $\Delta = -5 + 12i = (2 + 3i)^2$ $\mathcal{S} = \{1 + i, -1 - 2i\}$
 e. $\Delta = 16$ $\mathcal{S} = \{2 + 3i, -2 + 3i\}$
 f. $\Delta = 1 + 4i$

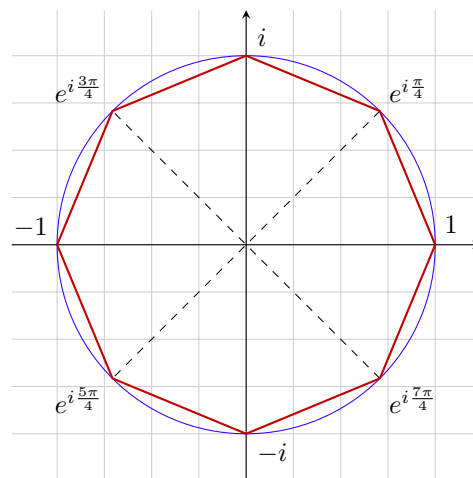
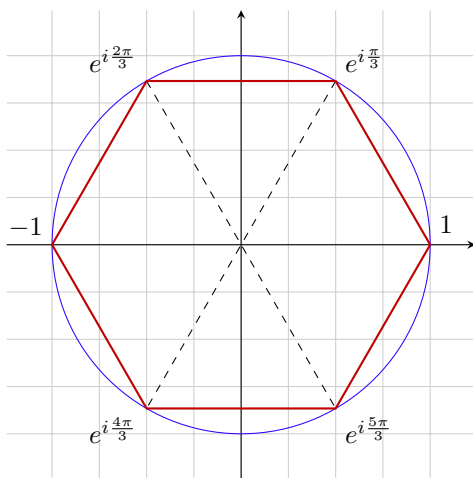
$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{2} \left[-1 \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{17}+1}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}} \right) \right] \right\}$$

⑩ Déterminer et représenter $\mathbb{U}_6$ et $\mathbb{U}_8$.

Par propriété :

$$\mathbb{U}_6 = \left\{ e^{ik\frac{\pi}{3}} \mid k = 0, \dots, 5 \right\} \quad \text{et} \quad \mathbb{U}_8 = \left\{ e^{ik\frac{\pi}{4}} \mid k = 0, \dots, 7 \right\}$$

On obtient un hexagone régulier et un octogone régulier.



11 Résoudre l'équation : $32z^4 = \sqrt{3}i - 1$

Comme $\sqrt{3}i - 1 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ alors :

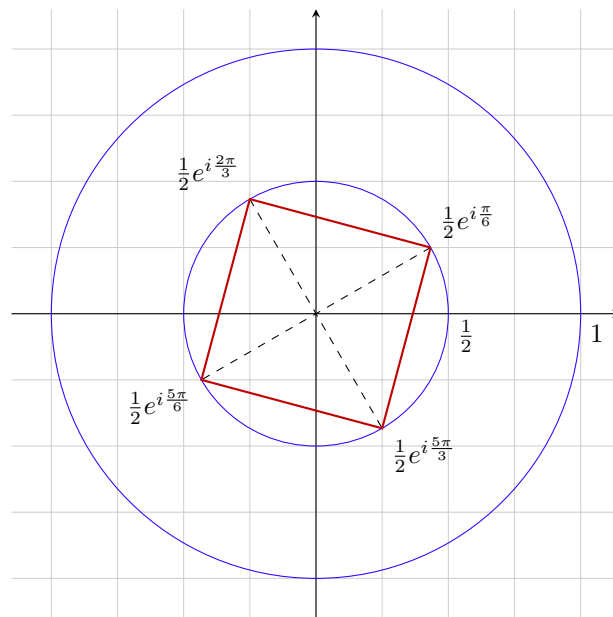
$$32z^4 = \sqrt{3}i - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad z^4 = \frac{1}{16}e^{i\frac{2\pi}{3}} = \left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^4$$

On en déduit :

$$32z^4 = \sqrt{3}i - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad z = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\zeta \quad \text{où } \zeta \in \mathbb{U}_4$$

Comme $\mathbb{U}_4 = \{\pm 1, \pm i\}$ alors l'ensemble des solutions est :

$$\mathcal{S} = \left\{ \pm \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}, \pm \frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}} \right\} = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i, -\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i, \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4} \right\}$$



12 Résoudre les équations :

a. $e^z = \sqrt{3} + i$ b. $e^{iz\pi} = 1 - i$ c. $e^{1-z} + e^z = \sqrt{2}e$

Rappelons que pour tous $z \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$:

$$e^z = re^{i\theta} \quad \Longleftrightarrow \quad z = \ln r + i\theta + i2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

On obtient :

$$\mathcal{S}_a = \left\{ \ln 2 + i\frac{\pi}{6} + 2ik\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \mathcal{S}_b = \left\{ -\frac{1}{4} + 2k - i\frac{\ln 2}{2\pi} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\mathcal{S}_c = \left\{ \frac{1}{2} \pm i\frac{\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

1 Calculer les complexes suivants :

$$\begin{aligned} a &= \frac{(3+5i)^2}{1-2i} & b &= (1+\sqrt{3}i)^3 & c &= \frac{3+i}{2-i} + \frac{2-i}{3+i} & d &= \frac{(4+3i)(3+4i)}{(4-3i)(3-4i)} \\ e &= e^{i\frac{\pi}{6}} + ie^{i\frac{\pi}{3}} & f &= \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} & g &= 1+i+i^2+\dots+i^{21} \\ h &= \sum_{k=1}^9 \binom{9}{k} (i\sqrt{3})^k & j &= \sum_{k=0}^8 \binom{8}{k} (i)^{2k} (1+i)^{8-k} & l &= \sum_{k=0}^8 (i)^{2k} (1+i)^{8-k} \end{aligned}$$

$$a = -\frac{76}{5} - \frac{2}{5}i \quad b = -8 \quad c = \frac{3}{2} + \frac{i}{2} \quad d = -1 \quad e = i$$

$$f = \left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} \right)^{20} = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}} \right)^{20} = 2^{10}e^{i\frac{35\pi}{3}} = 2^{10}e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2^9(1-i\sqrt{3})$$

$$g = \frac{1-i^{22}}{1-i} = \frac{(1-(-1))^{11}(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2(1+i)}{2} = 1+i$$

$$h = \sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} (i\sqrt{3})^k 1^{9-k} - 1 = (1+i\sqrt{3})^9 - 1 = (2e^{i\frac{\pi}{3}})^9 - 1 = 2^9e^{i3\pi} - 1 = -2^9 - 1 = -513$$

$$j = \sum_{k=0}^8 \binom{8}{k} (-1)^k (1+i)^{8-k} = (-1+1+i)^8 = i^8 = 1$$

$$\begin{aligned} l &= \sum_{k=0}^8 (-1)^k (1+i)^8 (1+i)^{-k} = (1+i)^8 \sum_{k=0}^8 \left(\frac{-1}{1+i} \right)^k = (1+i)^8 \times \frac{1 - \left(\frac{-1}{1+i} \right)^9}{1 - \frac{-1}{1+i}} \\ &= \frac{(1+i)^9 - (-1)^9}{2+i} = \frac{\left((\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^9 + 1 \right)(2-i)}{5} = \frac{(16(1+i) + 1)(2-i)}{5} = \frac{(17+16i)(2-i)}{5} = 10+3i \end{aligned}$$

2 Donner une forme exponentielle des complexes suivants :

$$a = 3-3i \quad b = -5i \quad c = 3 + \sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}} \quad d = (\sqrt{6} + \sqrt{2}i)(-\sqrt{6} + \sqrt{6}i) \quad e = \frac{1-i}{\sqrt{3}-i}$$

$$a = 3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad b = 5e^{-i\frac{\pi}{2}} \quad c = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} \quad d = 4\sqrt{6}e^{i\frac{11\pi}{12}} \quad e = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$$

3 Démontrer la *formule du parallélogramme* :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \quad |z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$$

puis l'inégalité :

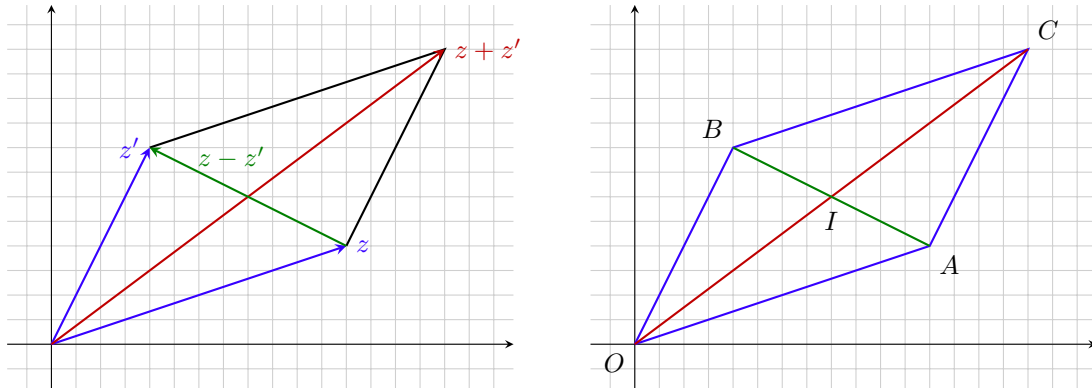
$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \quad |z| + |z'| \leq |z+z'| + |z-z'|$$

Soit z et z' deux complexes. La formule $|z|^2 = z\bar{z}$ donne :

$$|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = (z+z')(\bar{z}+\bar{z}') + (z-z')(\bar{z}-\bar{z}') = 2z\bar{z} + 2z'\bar{z}' = 2(|z|^2 + |z'|^2)$$

L'interprétation géométrique est la suivante :

Dans un parallélogramme la somme des carrés des longueurs des diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs des côtés.



Sur la figure ci-dessus : $OA^2 + AC^2 + CB^2 + BO^2 = OC^2 + AB^2$

Deux méthodes pour démontrer l'inégalité.

Méthode 1.

On remarque sur la figure ci-dessus que $OA \leqslant OI + IA$ et $OB \leqslant OI + IB$. Ceci est conséquence de l'inégalité triangulaire géométrique.

De plus $OI = IC$, et donc par somme $OA + OB \leqslant OI + IC + IA + IB = OC + AB$.

En terme de complexes on applique les inégalités triangulaires $|Z + Z'| \leqslant |Z| + |Z'|$ et $|Z - Z'| \leqslant |Z| + |Z'|$ aux complexes $Z = \frac{z+z'}{2}$ et $Z' = \frac{z-z'}{2}$, elles donnent :

$$|z| \leqslant \left| \frac{z+z'}{2} \right| + \left| \frac{z-z'}{2} \right| \quad \text{et} \quad |z'| \leqslant \left| \frac{z+z'}{2} \right| + \left| \frac{z-z'}{2} \right|$$

Par somme on en déduit :

$$|z| + |z'| \leqslant 2 \left| \frac{z+z'}{2} \right| + 2 \left| \frac{z-z'}{2} \right| = |z+z'| + |z-z'|.$$

L'inégalité est démontrée.

Méthode 2.

On procède par équivalences, en remarquant que les termes de l'inégalité sont des réels positifs.

$$\begin{aligned} & |z| + |z'| \leqslant |z+z'| + |z-z'| \\ \Leftrightarrow & (|z| + |z'|)^2 \leqslant (|z+z'| + |z-z'|)^2 \\ \Leftrightarrow & |z|^2 + 2|zz'| + |z'|^2 \leqslant |z+z'|^2 + 2|(z+z')(z-z')| + |z-z'|^2 \end{aligned}$$

L'égalité du parallélogramme donne :

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & 2|zz'| \leqslant |z|^2 + |z'|^2 + 2|(z+z')(z-z')| \\ \Leftrightarrow & 0 \leqslant |z|^2 + |z'|^2 - 2|z||z'| + 2|(z+z')(z-z')| \\ \Leftrightarrow & 0 \leqslant (|z| - |z'|)^2 + 2|(z+z')(z-z')| \end{aligned}$$

Cette dernière égalité est vraie car tous les termes sont positifs, donc par équivalence l'inégalité de départ est démontrée.

4 Représenter l'ensemble des points du plan d'affixe z vérifiant :

- a. $|z + 2i| \leq 2$ b. $|z + 2i| = |z - 6|$ c. $\frac{\pi}{6} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$
 d. $|z|^2 - 2\operatorname{Im} z = 1$ e. $z^6 \in \mathbb{R}$ f. $\operatorname{Im}(z^2) \leq 2$

On rappelle que si a et b sont deux complexes alors $|a - b|$ est la distance de a à b .

a. L'égalité $|z + 2i| \leq 2$ signifie que la distance de z à $-2i$ est inférieure ou égale à 2.

L'ensemble des complexes vérifiant cette inégalité est donc le disque fermé de centre $2i$ et de rayon 2.

b. Les complexes vérifiant l'égalité $|z + 2i| = |z - 6|$ sont les complexes à égale distance de $-2i$ et de 6, donc la médiatrice du segment joignant ces points.

En posant $z = x + iy$ on montre que l'égalité équivaut à $y = 8 - 3x$, il s'agit bien de la médiatrice du segment concerné.

c. Il s'agit du secteur du plan délimité par les demi-droites partant de l'origine et formant les angles $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{3}$.

d. On calcule :

$$\begin{aligned} |z|^2 - 2\operatorname{Im} z = 1 &\iff z\bar{z} - iz + i\bar{z} = 1 &\iff (z+i)(\bar{z}-i) - 1 = 1 \\ & &\iff |z+i|^2 = 2 &\iff |z-i| = \sqrt{2} \end{aligned}$$

C'est l'équation du cercle de centre i et de rayon $\sqrt{2}$.

e. Si $z \in \mathbb{C}^*$ alors on peut écrire $z = re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. L'égalité $z^6 \in \mathbb{R}$ signifie que 6θ est un multiple de π , donc θ est un multiple de $\frac{\pi}{6}$.

L'ensemble des complexes tels que $z^6 \in \mathbb{R}$ est donc l'union des six droites passant par l'origine et formant les angles $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{6}$.

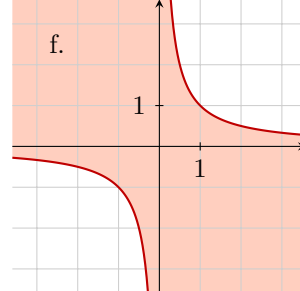
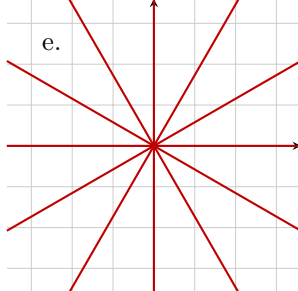
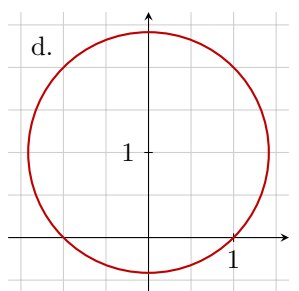
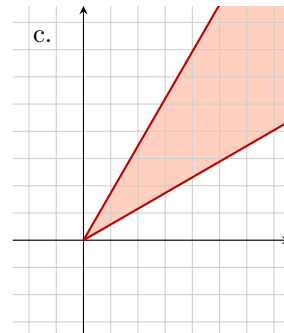
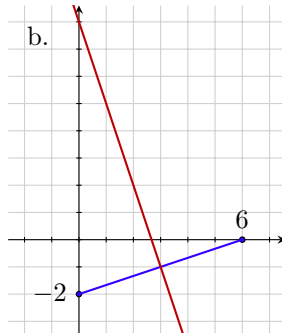
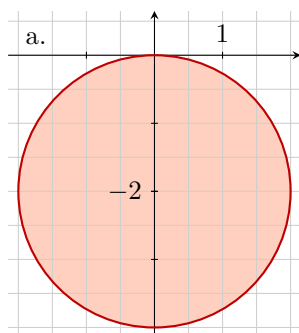
f. Posons $z = x + iy$ avec x et y réels.

Alors $z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$, donc l'inégalité $\operatorname{Im}(z^2) \leq 2$ équivaut à $xy \leq 1$.

Si x est strictement positif ceci donne $y \leq \frac{1}{x}$, il s'agit de la partie du demi-plan des x positifs contenant les points en-dessous de l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$.

Si x est strictement négatif ceci donne $y \geq \frac{1}{x}$, il s'agit de la partie du demi-plan des x négatifs contenant les points au-dessus de l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$.

Si x est nul, tous les réels y conviennent donc la droite d'équation $x = 0$ fait partie de l'ensemble solution.



5 Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^\pi \sin t \, dt \quad I_2 = \int_0^\pi \sin^2 t \, dt \quad I_3 = \int_0^\pi \sin^3 t \, dt \quad I_4 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos 4t \sin 3t \, dt$$

$$I_5 = \int_\pi^{2\pi} \cos^4 t \, dt \quad I_6 = \int_{\frac{\pi}{3}}^\pi \sin^2 t \sin 3t \, dt \quad I_7 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t \cos 2t \cos 3t \, dt$$

Par linéarisation on obtient :

$$I_1 = \left[-\cos t \right]_0^\pi = 2$$

$$I_2 = \int_0^\pi \frac{1}{2}(1 - \cos 2t) \, dt = \left[\frac{1}{2} \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right) \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$

$$I_3 = \int_0^\pi \frac{1}{4}(3 \sin t - \sin 3t) \, dt = \left[\frac{1}{4} \left(-3 \cos t + \frac{\cos 3t}{3} \right) \right]_0^\pi = \frac{4}{3}$$

$$I_4 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}(\sin 7t - \sin t) \, dt = \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{\cos 7t}{7} + \cos t \right) \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{3(1 - \sqrt{2})}{14}$$

$$I_5 = \int_\pi^{2\pi} \frac{1}{8}(\cos 4t + 4 \cos 2t + 3) \, dt = \left[\frac{1}{8} \left(\frac{\sin 4t}{4} + 4 \frac{\sin 2t}{2} + \cos t \right) \right]_\pi^{2\pi} = \frac{3\pi}{8}$$

$$I_6 = \int_{\frac{\pi}{3}}^\pi -\frac{1}{4}(\sin 5t - 2 \sin 3t + \sin t) \, dt = \left[\frac{1}{4} \left(\frac{\cos 5t}{5} - 2 \frac{\cos 3t}{3} + \cos t \right) \right]_{\frac{\pi}{3}}^\pi = -\frac{9}{20}$$

$$I_7 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4}(\cos 6t + \cos 4t + \cos 2t + 1) \, dt = \left[\frac{1}{4} \left(\frac{\sin 6t}{6} + \frac{\sin 4t}{4} + \frac{\sin 2t}{2} + t \right) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{12} + \frac{\pi}{16}$$

6 Calculer les sommes suivantes, avec x réel fixé.

$$a_n = \sum_{k=0}^n \sin kx \quad b_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin kx \quad c_n = \sum_{k=0}^n \cos^2 kx \quad d_n = \sum_{k=0}^n \frac{\cos kx}{\cos^k x}$$

Réponses :

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in 2\pi\mathbb{Z} \\ \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} & \text{sinon.} \end{cases} \quad b_n = 2^n \cos^n \frac{x}{2} \sin \frac{nx}{2}$$

$$c_n = \begin{cases} n+1 & \text{si } x \in \pi\mathbb{Z} \\ \frac{\cos nx \sin(n+1)x}{2 \sin x} + \frac{n+1}{2} & \text{sinon.} \end{cases} \quad d_n = \begin{cases} n+1 & \text{si } x \in \pi\mathbb{Z} \\ \frac{\sin(n+1)x}{\sin x \cos^n x} & \text{sinon, si } x \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z} \end{cases}$$

Calcul de a_n . On écrit :

$$a_n = \sum_{k=0}^n \operatorname{Im}(e^{ikx}) = \operatorname{Im} \left(\sum_{k=0}^n (e^{ix})^k \right)$$

Si x est multiple de 2π alors cette somme est égale à $\operatorname{Im}(n+1) = 0$, sinon :

$$a_n = \operatorname{Im} \left(\frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{e^{i \frac{(n+1)x}{2}} (e^{-i \frac{(n+1)x}{2}} - e^{i \frac{(n+1)x}{2}})}{e^{i \frac{x}{2}} (e^{-i \frac{x}{2}} - e^{i \frac{x}{2}})} \right)$$

$$= \operatorname{Im} \left(e^{i \frac{nx}{2}} \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right) = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

Calcul de b_n :

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \operatorname{Im}(e^{ikx}) = \operatorname{Im} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{ix})^k \right) \\ &= \operatorname{Im} \left((e^{ix} + 1)^n \right) \quad \text{d'après la formule du binôme} \\ &= \operatorname{Im} \left(\left(e^{i\frac{x}{2}} (e^{i\frac{x}{2}} + e^{-i\frac{x}{2}})^n \right) \right) = \operatorname{Im} \left(\left(e^{i\frac{nx}{2}} \left(2 \cos \frac{x}{2} \right)^n \right) \right) = 2^n \sin \frac{nx}{2} \cos^n \frac{x}{2} \end{aligned}$$

Calcul de c_n . On commence par linéariser puis on continue comme pour a_n .

$$c_n = \sum_{k=0}^n \frac{1 + \cos(2kx)}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^n 1 + \sum_{k=0}^n \cos(2kx) \right)$$

Calcul de d_n . On commence par remarquer que d_n n'est défini que si $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. Ensuite pour un tel x :

$$d_n = \sum_{k=0}^n \frac{\operatorname{Re}(e^{ikx})}{\cos^k x} = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n \left(\frac{e^{ix}}{\cos x} \right)^k \right)$$

Si x est multiple de π alors $\frac{e^{ix}}{\cos x} = 1$ donc $d_n = n + 1$.

Si non $\frac{e^{ix}}{\cos x} \neq 1$ et :

$$d_n = \operatorname{Re} \left(\frac{1 - \frac{e^{i(n+1)x}}{\cos^{n+1} x}}{1 - \frac{e^{ix}}{\cos x}} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1 - \frac{\cos(n+1)x}{\cos^{n+1} x} - i \frac{\sin(n+1)x}{\cos^{n+1} x}}{-i \frac{\sin x}{\cos x}} \right) = \frac{\sin(n+1)x}{\sin x \cos^n x}$$

7 Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$.

- | | |
|---|--|
| a. $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$ | j. $ z + iz = 1$ |
| b. $z^2 - (1 + 3i)z - 4 = 0$ | k. $2z + 3\bar{z} + 6 z ^2 = 65 + 3i$ |
| c. $z + \frac{10}{z} = 3 - 2i$ | l. $ z - 4 = z + 2i $ |
| d. $z^4 - 2z^2 \cos \theta + 1 = 0 \quad (\theta \in \mathbb{R})$ | m. $8 + z^6 = 0$ |
| e. $4z^2 + 8 z ^2 - 3 = 0$ | n. $z^6 + (2 - i)z^3 + 2 + 2i = 0$ |
| f. $(z^2 - 3z - 1)^2 + (4z - 7)^2 = 0$ | o. $z^4 + 7 + 24i = 0$ |
| g. $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 1 + 8i \end{cases}$ | p. $(1 + z)^5 = (1 - z)^5$ |
| h. $\bar{z} + iz = 1$ | q. $1 + 2z + 2z^2 + \dots + 2z^{n-1} + z^n = 0 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$ |
| | r. $(2 - z)^n = z^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$ |

Réponses :

- | | |
|---|--|
| a. $\Delta = -8i$ | $\mathcal{S} = \{1, 2i - 1\}$ |
| b. $\Delta = 8 + 6i = (3 + i)^2$ | $\mathcal{S} = \{-1 + i, 2 + 2i\}$ |
| c. $\Delta = -35 - 12i = (1 - 6i)^2$ | $\mathcal{S} = \{1 + 2i, 2 - 4i\}$ |
| d. $\Delta = -4 \sin^2 \theta = (2i \sin \theta)^2$ | $\mathcal{S} = \{\pm e^{\pm i\frac{\theta}{2}}\}$ |
| e. $\mathcal{S} = \left\{ \pm \frac{1}{2}, \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$ | |
| f. $\mathcal{S} = \{2 \pm i, 1 \pm 3i\}$ | |
| g. $\Delta = -32i = \left(4\sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}} \right)^2$ | $\mathcal{S} = \{(-1 + 2i, 3 - 2i), (3 - 2i, -1 + 2i)\}$ |
| h. $\mathcal{S} = \emptyset$ | |
| j. $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{i}{2} \right\}$ | |
| k. $\mathcal{S} = \left\{ 1 - 3i, -\frac{11}{6} - 3i \right\}$ | |

- l. $\mathcal{S} = \{3i + (1 - 2i)x \mid x \in \mathbb{R}\}$
- m. $\mathcal{S} = \left\{ \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{3})} \mid k = 0 \dots 5 \right\}$
- n. $\mathcal{S} = \left\{ i, e^{-i\frac{\pi}{6}}, e^{-i\frac{5\pi}{6}}, 1 + i, \sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}, \sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{12}} \right\}$
- o. $\mathcal{S} = \{\pm(1 + 2i), \pm(2 - i)\}$
- p. $\mathcal{S} = \left\{ i \tan \frac{k\pi}{5} \mid 0 \leq k \leq 4 \right\}$
- q. $\mathcal{S} = \mathbb{U}_n \cup \{-1\} \setminus \{1\}$
- r. $\mathcal{S} = \left\{ 1 + i \tan \frac{k\pi}{n} \mid k = 0 \dots n-1, k \neq \frac{n}{2} \right\}$

Détail :

a. $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$

Le discriminant de cette équation du second degré est $\Delta = -8i$.

On remarque que $\Delta = 8e^{-i\frac{\pi}{2}}$. Ainsi $\eta = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ est une racine carrée de Δ .

Ceci donne $\eta = 2 - 2i$, puis les solutions sont $\frac{2i \pm \eta}{2} = i \pm (1 - i)$, donc 1 et $2i - 1$.

On pouvait voir que 1 est racine évidente, et comme le produit des racines est égal à $-1 + 2i$, alors l'autre racine est $-1 + 2i$.

b. $z^2 - (1 + 3i)z - 4 = 0$

Le discriminant de cette équation est $\Delta = 8 + 6i$.

On cherche une racine carrée $\eta = a + ib$ de Δ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

L'équation $\eta^2 = \Delta$ donne $a^2 - b^2 + 2iab = 8 + 6i$, et comme $|\eta|^2 = |\Delta|$ alors $a^2 + b^2 = 10$. Ainsi a et b sont solutions du système :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 8 \\ 2ab = 6 \\ a^2 + b^2 = 10 \end{cases}$$

On obtient $a^2 = 9$, $b^2 = 1$ et $ab = 6$. Par exemple $\eta = 3 + i$ convient.

Les solutions de l'équation sont donc $z_1 = -1 + i$ et $z_2 = 2 + 2i$.

c. $z + \frac{10}{z} = 3 - 2i$

Cette équation est définie pour tout complexe z non-nul.

Elle équivaut à l'équation du second degré : $z^2 - (3 - 2i)z + 10 = 0$.

Le discriminant de celle-ci est $\Delta = -35 - 12i$. Il admet pour racine carrée $\eta = 1 - 6i$, donc les solutions sont $z_1 = 1 + 2i$ et $z_2 = 2 - 4i$.

d. $z^4 - 2z^2 \cos \theta + 1 = 0 \quad (\theta \in \mathbb{R})$

On résout l'équation $Z^2 - 2Z \cos \theta + 1 = 0$.

Son discriminant est $\Delta = -4 \sin^2 \theta$, lequel admet $\eta = 2i \sin \theta$ pour racine carrée, donc les racines du polynôme $Z^2 - 2Z \cos \theta + 1$ sont $Z_1 = e^{i\theta}$ et $Z_2 = e^{-i\theta}$.

On peut vérifier les formules de somme et produit des solutions d'une équation du second degré : $Z_1 + Z_2 = 2 \cos \theta$ et $Z_1 Z_2 = 1$.

Les solutions de l'équation $z^4 - 2z^2 \cos \theta + 1 = 0$ sont les racines carrées de Z_1 et de Z_2 , donc $\pm e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $\pm e^{-i\frac{\theta}{2}}$.

e. $4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0$

En posant $z = x + iy$ et en identifiant les parties réelles et imaginaires on obtient

$$4x^2 + 8|z|^2 - 3 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 12x^2 + 4y^2 = 3 \\ xy = 0 \end{cases}$$

Ainsi $x = 0$ ou $y = 0$. Dans le premier cas on obtient $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ et dans le second cas on obtient $x = \pm \frac{1}{2}$.

Les solutions sont donc $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

f. $(z^2 - 3z - 1)^2 + (4z - 7)^2 = 0$

Attention, développer l'expression $(z^2 - 3z - 1)^2 + (4z - 7)^2$ ne permet pas de résoudre l'équation. On aboutirait à une équation du quatrième degré que l'on ne sait pas résoudre.

Il vaut mieux utiliser l'identité remarquable :

$$\begin{aligned}(z^2 - 3z - 1)^2 + (4z - 7)^2 &= (z^2 - 3z - 1)^2 - i^2(4z - 7)^2 \\ &= (z^2 - 3z - 1)^2 - (4iz - 7i)^2 \\ &= (z^2 - (3 - 4i)z - 1 - 7i)(z^2 - (3 + 4i)z - 1 + 7i)\end{aligned}$$

Ainsi :

$$(z^2 - 3z - 1)^2 + (4z - 7)^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} z^2 - (3 - 4i)z - 1 - 7i = 0 & (E_1) \\ \text{ou} \\ z^2 - (3 + 4i)z - 1 + 7i = 0 & (E_2) \end{cases}$$

Il faut donc résoudre ces deux équations du second degré.

On constate qu'elles sont conjuguées :

$$z^2 - (3 - 4i)z - 1 - 7i = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{z^2 - (3 - 4i)z - 1 - 7i} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{z}^2 - (3 + 4i)\bar{z} - 1 + 7i = 0$$

Ceci montre que les solutions de (E_2) sont les conjuguées de celles de (E_1) .

Le discriminant de l'équation (E_1) est $\Delta = -3 + 4i$, il admet pour racine carrée $\eta = 1 + 2i$, donc les solutions de (E_1) sont $z_1 = 2 - i$ et $z_2 = 1 - 3i$.

Les deux autres solutions de l'équation de départ sont $\bar{z}_1 = 2 + i$ et $\bar{z}_2 = 1 + 3i$.

g. $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 1 + 8i \end{cases}$

On vérifie qu'un couple de complexes (x, y) est solution de ce système si et seulement si x et y sont les deux racines de l'équation

$$z^2 - 2z + 1 + 8i = 0$$

Le discriminant de cette équation est $\Delta = -32i$.

Comme $\Delta = 32e^{-i\frac{\pi}{2}} = (4\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}})^2$ alors il admet pour racine carrée $\eta = 4\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = 4(1 - i)$.

On en déduit les solutions $z_1 = -1 + 2i$ et $z_2 = 3 - 2i$, donc l'ensemble des solutions du système est $\mathcal{S} = \{(-1 + 2i, 3 - 2i), (3 - 2i, -1 + 2i)\}$.

h. $\bar{z} + iz = 1$

En posant $z = x + iy$ où x et y sont des réels, cette équation donne $(x - y) + i(x - y) = 1$, puis par identification : $\begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = 0. \end{cases}$

Ce système n'admet pas de solution, donc l'équation proposée n'en admet pas non plus.

j. $|z| + iz = 1$

Cette équation équivaut à $iz = 1 - |z|$, ce qui implique que iz est réel, donc z est imaginaire pur.

On pose donc $z = iy$ avec $y \in \mathbb{R}$, ce qui donne $|y| - y = 1$.

Si y est positif cette équation n'a pas de solution, si y est négatif alors $y = -\frac{1}{2}$.

On vérifie que $z = -\frac{1}{2}i$ est bien solution : $|z| - iz = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S} = \{-\frac{1}{2}i\}$.

k. $2z + 3\bar{z} + 6|z|^2 = 65 + 3i$

On pose $z = x + iy$.

Par identification on montre que $y = -3$ et x est solution de l'équation $6x^2 + 5x - 11 = 0$, ce qui donne $x = 1$ ou $x = -\frac{11}{6}$.

l. $|z - 4| = |z + 2i|$

Méthode 1. L'ensemble des solutions est la médiatrice du segment $[AB]$ où A et B sont les points d'affixe 4 et $-2i$.

On calcule l'équation de cette droite : $y = 3 - 2x$.

Donc les solutions sont les points d'affixes $x + i(3 - 2x)$, où x parcourt $\mathbb{R}$.

Méthode 2. On pose $z = x + iy$ où x et y sont réels.

Par équivalences :

$$\begin{aligned} |z - 4| = |z + 2i| &\iff |z - 4|^2 = |z + 2i|^2 \\ &\iff (z - 4)(\bar{z} - 4) = (z + 2i)(\bar{z} - 2i) \\ &\iff 4(z + \bar{z}) - 2i(z - \bar{z}) = 12 \iff 2x + y = 3 \end{aligned}$$

On obtient : $\mathcal{S} = \{x + i(3 - 2x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

m. $8 + z^6 = 0$

L'équation donne $z^6 = -8$. Il s'agit donc de calculer les racines 6^{èmes} de -8 .

Comme $-8 = 8e^{i\pi}$ alors une racine 6^{ème} de -8 est $b = \sqrt[6]{8}e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Alors les racines 6^{èmes} de a sont les $b\zeta$ où ζ parcourt $\mathbb{U}_6$.

Comme $\mathbb{U}_6 = \{e^{ik\frac{\pi}{3}} \mid k = 0, \dots, 5\}$ alors on obtient

$$\mathcal{S} = \{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}, \sqrt{2}i, \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}, \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{6}}, -\sqrt{2}i, \sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{6}}\}$$

n. $z^6 + (2 - i)z^3 + 2 + 2i = 0$

On résout l'équation : $Z^2 + (2 - i)Z + 2 + 2i$.

Le discriminant est $\Delta = -5 - 12i$, on montre que $\eta = 2 - 3i$ en est une racine carrée, donc les racines de l'équation : $Z^2 + (2 - i)Z + 2 + 2i$ sont $Z_1 = -2 + 2i$ et $Z_2 = -i$.

Les racines de l'équation de départ sont les racines troisième de Z_1 et de Z_2 .

On remarque que $Z_1 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^3$, et $Z_2 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = (e^{i\frac{\pi}{2}})^3$.

Comme $\mathbb{U}_3 = \{1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}\}$ alors l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \{1 + i, \sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}, \sqrt{2}e^{i\frac{19\pi}{12}}, i, e^{i\frac{7\pi}{6}}, e^{i\frac{11\pi}{6}}\}$$

o. $z^4 + 7 + 24i = 0$

Les solutions de cette équation sont les racines 4^{èmes} de $-7 - 24i$.

On calcule les racines carrées de $-7 - 24i$: on obtient $3 - 4i$ et $-3 + 4i$.

On calcule ensuite les racines carrées de $3 - 4i$ et celles de $-3 + 4i$.

On obtient $2 - i$, $-2 + i$, $1 + 2i$ et $-1 - 2i$.

p. $(1 + z)^5 = (1 - z)^5$

Méthode 1. On utilise les racines 5^{èmes} de l'unité.

Tout d'abord 1 n'est pas solution, car $2^5 \neq 0$. On en déduit :

$$(1 + z)^5 = (1 - z)^5 \iff \left(\frac{1 + z}{1 - z}\right)^5 = 1 \iff \frac{1 + z}{1 - z} \in \mathbb{U}_5$$

On sait que $\mathbb{U}_5 = \{e^{ik\frac{2\pi}{5}} \mid k = 0, \dots, 4\}$.

Soit $\zeta = e^{ik\frac{2\pi}{5}}$ où $k \in \{0, \dots, 4\}$. Alors :

$$\frac{1 + z}{1 - z} = \zeta \iff 1 + z = \zeta - \zeta z \iff z(\zeta + 1) = \zeta - 1$$

Comme ζ est racine 5^{ème} de l'unité alors $\zeta \neq -1$ (en effet $(-1)^5 = -1 \neq 1$), donc :

$$\frac{1 + z}{1 - z} = \zeta \iff z = \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}$$

Grâce à l'angle moitié on calcule :

$$\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} = \frac{e^{ik\frac{2\pi}{5}} - 1}{e^{ik\frac{2\pi}{5}} + 1} = \frac{e^{ik\frac{\pi}{5}} - e^{-ik\frac{\pi}{5}}}{e^{ik\frac{\pi}{5}} + e^{-ik\frac{\pi}{5}}} = \frac{i \sin\left(k\frac{\pi}{5}\right)}{\cos\left(k\frac{\pi}{5}\right)} = i \tan\left(k\frac{\pi}{5}\right)$$

On en déduit l'ensemble des solutions :

$$\mathcal{S} = \left\{ i \tan\left(k\frac{\pi}{5}\right) \mid k = 0, \dots, 4 \right\}$$

Méthode 2.

On développe les termes de l'équation grâce à la formule du binôme :

$$\begin{aligned} (1+z)^5 &= (1-z)^5 & \iff & 1+5z+10z^2+10z^3+5z^4+z^5 = 1-5z+10z^2-10z^3+5z^4-z^5 \\ & & \iff & z^5+10z^3+5z = 0 \end{aligned}$$

Cette dernière équation s'écrit : $z(z^4+10z^2+5)=0$

Les solutions de l'équation du second degré $Z^2+10Z+5=0$ sont $Z_1 = -5-2\sqrt{5}$ et $Z_2 = -5+2\sqrt{5}$. Elles sont négatives, donc leurs racines sont $\pm i\sqrt{5+2\sqrt{5}}$ pour Z_1 et $\pm i\sqrt{5-2\sqrt{5}}$ pour Z_2 .

L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathcal{S} = \left\{ 0, i\sqrt{5+2\sqrt{5}}, -i\sqrt{5+2\sqrt{5}}, i\sqrt{5-2\sqrt{5}}, -i\sqrt{5-2\sqrt{5}} \right\}$$

Remarque. Les deux méthodes ci-dessus ne donnent pas les mêmes expressions des solutions.

Comme la fonction $\tan$ est strictement croissante que $\left[0, \frac{\pi}{2} \right[$ et sur $\left] \frac{\pi}{2}, \pi \right]$ on peut identifier les solutions, ce qui démontre que :

$$\begin{array}{lll} \tan 0 = 0 & \tan \frac{\pi}{5} = \sqrt{5-2\sqrt{5}} & \tan \frac{2\pi}{5} = \sqrt{5+2\sqrt{5}} \\ & \tan \frac{3\pi}{5} = -\sqrt{5+2\sqrt{5}} & \tan \frac{4\pi}{5} = -\sqrt{5-2\sqrt{5}} \end{array}$$

q. $1+2z+2z^2+\dots+2z^{n-1}+z^n=0 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

Par équivalence :

$$1+2z+2z^2+\dots+2z^{n-1}+z^n=0 \iff (1+z)(1+z+z^2+\dots+z^{n-1})=0$$

On constate que 1 n'est pas solution, car $2n \neq 0$. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \quad & (1+z)(1+z+z^2+\dots+z^{n-1})=0 \\ \iff & (1+z) \frac{1-z^n}{1-z} = 0 \\ \iff & (z+1)(z^n-1)=0 \iff z=-1 \quad \text{ou} \quad z^n=1 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S} = \mathbb{U}_n \setminus \{1\} \cup \{-1\}$.

Si n est pair alors -1 est déjà dans l'ensemble $\mathbb{U}_n$.

On peut vérifier par exemple que si $n=1$ alors $\mathcal{S} = \{-1\}$

si $n=2$ alors $\mathcal{S} = \{-1\}$

si $n=3$ alors $\mathcal{S} = \{-1, j, j^2\}$

etc.

r. $(2-z)^n = z^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

On remarque que 0 n'est pas solution, car $2^n \neq 0$. Alors par équivalences :

$$\forall z \in \mathbb{C}^* \quad (2-z)^n = z^n \iff \left(\frac{2-z}{z}\right)^n = 1 \iff \frac{2}{z} - 1 \in \mathbb{U}_n$$

Soit $\zeta \in \mathbb{U}_n$. Alors :

$$\frac{2}{z} - 1 = \zeta \quad \Longleftrightarrow \quad 2 = (1 + \zeta)z$$

Si $\zeta = -1$ alors cette équation n'a pas de solution.

Si $\zeta \neq -1$ alors :

$$\frac{2}{z} - 1 = \zeta \quad \Longleftrightarrow \quad z = \frac{2}{\zeta + 1}$$

Comme ζ est une racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité alors il existe $k \in \{0, \dots, n-1\}$ tel que $\zeta = e^{ik\frac{2\pi}{n}}$.

Comme $\eta \neq -1$ alors $k \neq \frac{n}{2}$. Cette contrainte n'a lieu que si n est pair.

Alors :

$$\frac{2}{\zeta + 1} = \frac{2}{e^{ik\frac{2\pi}{n}} + 1} = \frac{2e^{-ik\frac{\pi}{n}}}{e^{-ik\frac{\pi}{n}} + e^{ik\frac{\pi}{n}}} = \frac{\cos(k\frac{\pi}{n}) - i\sin(k\frac{\pi}{n})}{\cos(k\frac{\pi}{n})} = 1 - i\tan\left(k\frac{\pi}{n}\right)$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathcal{S} = \left\{ 1 - i\tan\left(k\frac{\pi}{n}\right) \mid k = 0, \dots, n-1, \quad k \neq \frac{n}{2} \right\}$$

On peut ajouter que cet ensemble est en fait :

$$\mathcal{S} = \left\{ 1 + i\tan\left(k\frac{\pi}{n}\right) \mid k = 0, \dots, n-1, \quad k \neq \frac{n}{2} \right\}$$

On peut démontrer ceci grâce au changement d'indice $j = n - k$, car la fonction tangente est impaire et π -périodique.

8 Soit $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + jy + j^2z = e^{i\frac{\pi}{3}} \\ x + j^2y + jz = e^{-i\frac{\pi}{3}} \end{cases}$$

Notons (S) ce système.

Les opérations élémentaires ($L_2 \leftarrow L_2 - L_1$) et ($L_3 \leftarrow L_3 - L_1$) donnent :

$$(S) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x + y + z = 2 \\ (j-1)y + (j^2-1)z = e^{i\frac{\pi}{3}} - 2 \\ (j^2-1)y + (j-1)z = e^{-i\frac{\pi}{3}} - 2 \end{cases}$$

On remarque que $(j^2-1) = (j-1)(j+1)$, ce qui nous amène à appliquer l'opération ($L_3 \leftarrow L_3 - (j+1)L_2$).

On remarque que $j+1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$: soit par le calcul direct, soit géométriquement. Ainsi $(j+1)^2 = j$ et :

$$\begin{aligned} (j-1) - (j+1)(j^2-1) &= (j-1)(1 - (j+1)^2) = -(j-1)^2 \\ (e^{-i\frac{\pi}{3}} - 2) - (j+1)(e^{i\frac{\pi}{3}} - 2) &= e^{-i\frac{\pi}{3}} - 2 - j + 2j + 2 = e^{-i\frac{\pi}{3}} + j = 0 \end{aligned}$$

Ceci donne :

$$(S) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x + y + z = 2 \\ (j-1)y + (j^2-1)z = e^{i\frac{\pi}{3}} - 2 \\ - (j-1)^2z = 0 \end{cases}$$

Les opérations ($L_3 \leftarrow \frac{-1}{(j-1)^2}L_3$), puis ($L_1 \leftarrow L_1 - L_3$) et ($L_2 \leftarrow L_2 - (j^2-1)L_3$) donnent :

$$(S) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x + y = 2 \\ (j-1)y = e^{i\frac{\pi}{3}} - 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

On conclut avec les opérations ($L_2 \leftarrow \frac{1}{j-1}L_2$) puis ($L_1 \leftarrow L_1 - L_2$).

On calcule $\frac{e^{i\frac{\pi}{3}} - 2}{j-1} = \frac{-\frac{2}{3} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{2}{3} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1$ donc :

$$(S) \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Le système $\mathcal{S}$ admet donc pour unique solution le triplet $(1, 1, 0)$.

9 Soit ω une racine 5^{ème} de l'unité différente de 1.

a. Calculer $\sum_{k=0}^4 \omega^k$.

b. Soit $z_1 = \omega + \omega^4$ et $z_2 = \omega^2 + \omega^3$. Démontrer que z_1 et z_2 satisfont l'équation $z^2 + z - 1 = 0$.

c. En déduire les valeurs de $\cos \frac{2\pi}{5}$ et $\cos \frac{4\pi}{5}$, puis celle de $\cos \frac{\pi}{5}$.

a. Comme ω est différent de 1 alors : $\sum_{k=0}^4 \omega^k = \frac{1 - \omega^5}{1 - \omega}$.

Comme ω est une racine 5^{ème} de l'unité alors $\omega^5 = 1$ donc : $\sum_{k=0}^4 \omega^k = 0$.

b. On calcule : $z_1^2 = (\omega + \omega^4)^2 = \omega^2 + 2\omega^5 + \omega^8$.

Comme $\omega^5 = 1$ alors : $z_1^2 = \omega^2 + 2 + \omega^3$.

On en déduit : $z_1^2 + z_1 - 1 = \omega^2 + \omega^3 + \omega + \omega^4 + 1 = \sum_{k=0}^4 \omega^k$

D'après la question précédente : $z_1^2 + z_1 - 1 = 0$.

De même : $z_2^2 = (\omega^2 + \omega^3)^2 = \omega^4 + 2\omega^5 + \omega^6 = \omega^4 + 2 + \omega$.

Donc : $z_2^2 + z_2 - 1 = \sum_{k=0}^4 \omega^k = 0$.

Ainsi z_1 et z_2 satisfont l'équation $z^2 + z - 1 = 0$.

c. Les solutions de l'équation ci-dessus sont $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Posons $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$, et $z_1 = \omega + \omega^4$, $z_2 = \omega^2 + \omega^3$.

Alors ω est une racine 5^{ème} de l'unité différente de 1, donc z_1 et z_2 sont solutions de l'équation $z^2 + z - 1 = 0$, et ainsi ils prennent l'une des valeurs $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

D'autre part :

$$z_1 = \omega + \omega^4 = e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{8\pi}{5}} = e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{-i\frac{2\pi}{5}} = 2 \cos \frac{2\pi}{5}$$

$$z_2 = \omega^2 + \omega^3 = e^{i\frac{4\pi}{5}} + e^{i\frac{6\pi}{5}} = e^{i\frac{4\pi}{5}} + e^{-i\frac{4\pi}{5}} = 2 \cos \frac{4\pi}{5}$$

Comme $\frac{2\pi}{5} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $\frac{4\pi}{5} \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ alors $\cos \frac{2\pi}{5} \geq 0$ et $\cos \frac{4\pi}{5} \leq 0$, donc $z_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et $z_2 = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$, ce qui donne :

$$\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \quad \text{et} \quad \cos \frac{4\pi}{5} = \frac{-\sqrt{5}-1}{4}$$

Comme $\frac{\pi}{5} = \pi - \frac{4\pi}{5}$ alors $\cos \frac{\pi}{5} = -\cos \frac{4\pi}{5}$ donc :

$$\cos \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

10 Soit n un entier naturel strictement positif.

a. Soit p et q deux réels.

Déterminer le module de $e^{ip} - e^{iq}$.

b. En déduire la distance entre deux racines n -èmes de l'unité consécutives.

c. Calculer le périmètre puis l'aire du polygone régulier formé par les racines n -èmes de l'unité.

d. Donner les limites du périmètre et de l'aire calculés précédemment lorsque n tend vers $+\infty$.

a. La factorisation par l'angle moitié donne :

$$|e^{ip} - e^{iq}| = \left| e^{i\frac{p+q}{2}} (e^{i\frac{p-q}{2}} - e^{i\frac{q-p}{2}}) \right| = \left| e^{i\frac{p+q}{2}} \right| \times \left| 2i \sin \frac{p-q}{2} \right|$$

Comme $\left| e^{i\frac{p+q}{2}} \right| = |i| = 1$ alors :

$$|e^{ip} - e^{iq}| = 2 \sin \frac{p-q}{2}$$

b. Deux racines n -èmes de l'unité consécutives sont de la forme :

$$\zeta = e^{ik\frac{2\pi}{n}} \quad \text{et} \quad \zeta' = e^{i(k+1)\frac{2\pi}{n}}$$

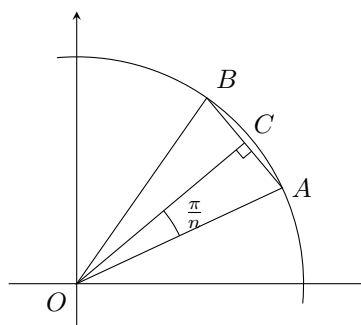
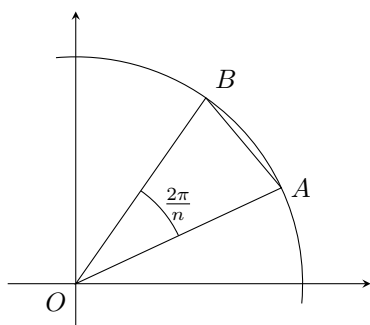
où k est un entier. La distance entre ces deux racines est le module de leur différence :

$$|\zeta' - \zeta| = \left| e^{i(k+1)\frac{2\pi}{n}} - e^{ik\frac{2\pi}{n}} \right|$$

On applique la question précédente avec $p = (k+1)\frac{2\pi}{n}$ et $q = k\frac{2\pi}{n}$. Alors $p - q = \frac{2\pi}{n}$, cet angle est compris entre 0 et 2π , donc la réponse attendue est :

$$|\zeta' - \zeta| = 2 \sin \frac{\pi}{n}$$

Application graphique. Soit A et B deux points consécutifs sur le polygone régulier formé par les racines de l'unité. Alors A et B sont sur le cercle unité, et l'angle $(\vec{OA}, \vec{OB})$ mesure $\frac{2\pi}{n}$.



Soit C le milieu du segment $[AB]$. Le triangle OAB est isocèle (car $OA = OB = 1$) donc l'angle $(\vec{OA}, \vec{OC})$ est la moitié de l'angle $(\vec{OA}, \vec{OB})$, donc il mesure $\frac{\pi}{n}$.

De plus la droite (OC) est la médiatrice du segment $[AB]$, donc elle lui est perpendiculaire.

On en déduit : $\sin \frac{\pi}{n} = \frac{AC}{OA}$ puis $AC = \sin \frac{\pi}{n}$.

Finalement, comme C est le milieu du segment $[AB]$ alors $AB = 2AC = 2 \sin \frac{\pi}{n}$.

c. La distance calculée dans la question précédente est la longueur de chaque côté du polygone régulier formé par les racines n -èmes de l'unité. Ce polygone contient n côtés donc sa circonférence est :

$$C_n = 2n \sin \frac{\pi}{n}$$

L'aire du triangle OAB ci-dessus est $\frac{1}{2}AB \times OC = \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} = \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{n}$. Le polygone contient n triangles semblables donc son aire est :

$$A_n = \frac{n}{2} \sin \frac{2\pi}{n}$$

d. On peut écrire :

$$C_n = 2\pi \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}$$

La limite de $\frac{\pi}{n}$ lorsque n tend vers l'infini est 0, donc par composition de limites :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

Ceci montre que la limite de C_n lorsque n tend vers $+\infty$ est 2π :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} C_n = 2\pi$$

Cette longueur est la circonférence du cercle trigonométrique, ce qui se comprend bien puisque le polygone régulier à n côtés inscrit dans ce cercle tend vers ce cercle lorsque n tend vers $+\infty$.

Pour l'aire on écrit :

$$A_n = \pi \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}$$

De même que ci-dessus on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \pi$$

Effectivement cette aire est celle du cercle trigonométrique.

11 Soit z un complexe différent de 1.

a. À quelle condition nécessaire et suffisante le complexe $\frac{z+1}{z-1}$ est-il

(i) réel ?

(ii) imaginaire pur ?

(iii) de module 1 ?

b. En considérant les points A, B, M d'affixes respectives 1, $-1, z$, retrouver géométriquement les résultats des questions (i) et (iii) ci-dessus.

Quelle théorème démontre-t-on grâce au (ii) ?

a. On utilise les propriétés :

$$z \in \mathbb{R} \iff \bar{z} = z \qquad z \in i\mathbb{R} \iff \bar{z} = -z \qquad z \in \mathbb{U} \iff z\bar{z} = 1$$

(i) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Par équivalences :

$$\begin{aligned} \frac{z+1}{z-1} \in \mathbb{R} &\iff \overline{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)} = \frac{z+1}{z-1} &\iff \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}-1} = \frac{z+1}{z-1} \\ &\iff (\bar{z}+1)(z-1) = (z+1)(\bar{z}-1) &\iff \bar{z} = z \end{aligned}$$

Ceci montre que $\frac{z+1}{z-1}$ est réel si et seulement si z est réel.

(ii) De même :

$$\begin{aligned} \frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R} &\iff \overline{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)} = -\frac{z+1}{z-1} &\iff \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}-1} = -\frac{z+1}{z-1} \\ &\iff (\bar{z}+1)(z-1) = -(z+1)(\bar{z}-1) &\iff z\bar{z} = 1 \end{aligned}$$

Ceci montre que $\frac{z+1}{z-1}$ est imaginaire pur si et seulement si z est de module 1.

(iii) Toujours par équivalences :

$$\begin{aligned} \frac{z+1}{z-1} \in \mathbb{U} &\iff \overline{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)} \times \frac{z+1}{z-1} = 1 &\iff \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}-1} \times \frac{z+1}{z-1} = 1 \\ &\iff (\bar{z}+1)(z+1) = (z-1)(\bar{z}-1) &\iff \bar{z} = -z \end{aligned}$$

Ceci montre que $\frac{z+1}{z-1}$ est de module 1 si et seulement si z est imaginaire pur.

b. Soit A, B, M les points d'affixes respectives $1, -1$ et z .

Alors $z + 1$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{BM}$ et $z - 1$ est celle du vecteur $\overrightarrow{AM}$.

Par propriété :

$$\begin{aligned} \frac{z+1}{z-1} \in \mathbb{R} &\iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{BM} \text{ sont colinéaires} \\ &\iff \text{Les points } A, B, M \text{ sont alignés} \\ &\iff \text{Le point } M \text{ appartient à la droite } (AB) \\ &\iff z \text{ est réel.} \end{aligned}$$

En effet la droite (AB) est l'axe des réels.

Ceci démontre de nouveau le point (i).

De même :

$$\begin{aligned} \frac{z+1}{z-1} \in \mathbb{U} &\iff AM = BM \\ &\iff \text{Le point } M \text{ est sur la médiatrice du segment } [AB] \\ &\iff z \text{ est imaginaire pur.} \end{aligned}$$

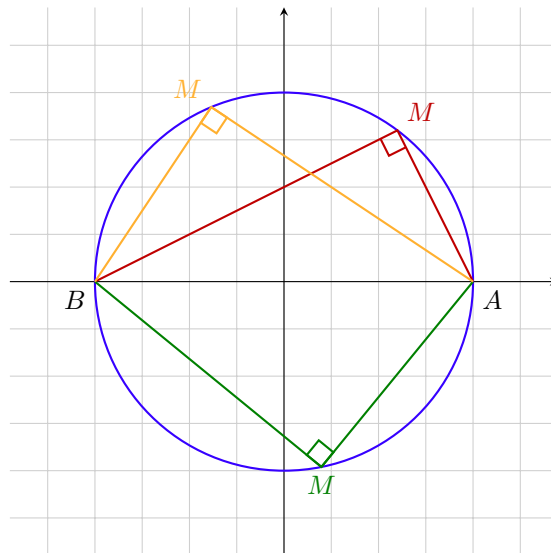
En effet, la médiatrice du segment $[AB]$ est l'axe des imaginaires purs.

Ceci démontre de nouveau le point (iii).

Enfin :

$$\begin{aligned} \frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R} &\iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{BM} \text{ sont orthogonaux} \\ &\iff \text{Le triangle } ABM \text{ est rectangle en } M \\ \text{Et } z \in \mathbb{U} &\iff M \text{ est sur le cercle trigonométrique,} \\ &\quad \text{c'est-à-dire sur le cercle de diamètre } [AB]. \end{aligned}$$

Le point (ii) démontre donc le théorème : Soit A et B deux points distincts. L'ensemble des points M tels que le triangle AMB est rectangle en M est le cercle de diamètre $[AB]$.



12 À tout point M d'affixe z différente de 1 on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z-1}{1-\bar{z}}$.

- Démontrer que $\frac{z'-1}{z-1}$ est réel et que $\frac{z'+1}{z-1}$ est imaginaire pur.
- En déduire une construction géométrique du point M' connaissant le point M .
- Quel est le module de z' ?

a. On calcule :

$$\frac{z'-1}{z-1} = \frac{\frac{z-1}{1-\bar{z}} - 1}{z-1} = \frac{z-2+\bar{z}}{(z-1)(1-\bar{z})} = \frac{z+\bar{z}-2}{z+\bar{z}-1-z\bar{z}} = \frac{2\operatorname{Re}(z)-2}{2\operatorname{Re}(z)-1-|z|^2}$$

Ceci montre que $\frac{z'-1}{z-1}$ est réel.

De plus :

$$\frac{z'+1}{z-1} = \frac{\frac{z-1}{1-\bar{z}} + 1}{z-1} = \frac{z-\bar{z}}{(z-1)(1-\bar{z})} = \frac{2i\operatorname{Im}(z)}{2\operatorname{Re}(z)-1-|z|^2}$$

Ceci montre que $\frac{z'+1}{z-1}$ est imaginaire pur.

- b. Soit A et B les points d'affixes respectives 1 et -1 .

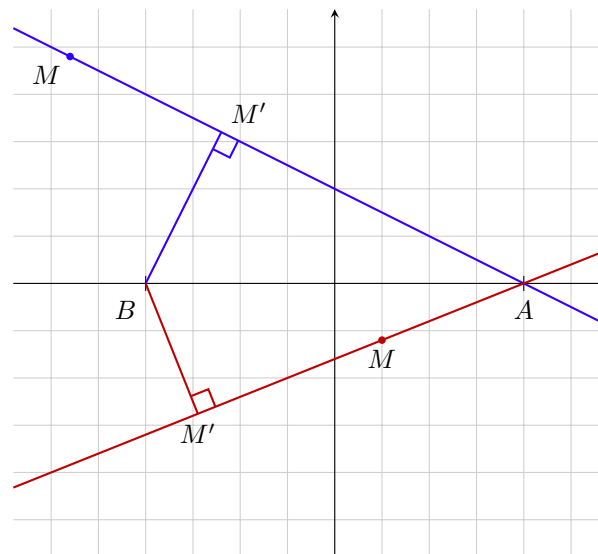
Comme $\frac{z'-1}{z-1}$ est réel alors les vecteurs $\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires, donc les points A , M et M' sont alignés.

Ceci montre que M' est sur la droite (AM) .

Comme $\frac{z'+1}{z-1}$ est imaginaire pur alors les vecteurs $\overrightarrow{BM'}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont orthogonaux, donc les droites (BM') et (AM) sont perpendiculaires.

Ceci montre que M' est sur la droite passant par B orthogonale à la droite (AM) .

Finalement M' est le projeté orthogonal de B sur (AM) .



c. On calcule :

$$|z'|^2 = z'\bar{z}' = \frac{z-1}{1-\bar{z}} \times \frac{\bar{z}-1}{1-z} = 1$$

Ceci montre que z' est de module 1.

Effectivement, en accord avec le théorème démontré dans l'exercice précédent, M est sur le cercle de diamètre $[AB]$, qui est le cercle trigonométrique.

13 Soit z un complexe non-nul et différent de 1, et A, B, C les points d'affixes respectives z, z^2 et z^3 .

- Démontrer que A, B, C sont alignés si et seulement si z est réel.
- Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si z admet -1 pour partie réelle.
- Donner de même une condition nécessaire et suffisante pour que le triangle ABC soit rectangle en B .

- a. Les points A, B, C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, donc si et seulement si $\frac{z^3-z}{z^2-z}$ est réel.

Remarquons que ce quotient est bien défini, car $z^2 - z = z(z - 1)$ et z est différent de 0 et de 1.

On calcule $\frac{z^3-z}{z^2-z} = z + 1$, donc A, B, C sont alignés si et seulement si $z + 1$ est réel, ce qui équivaut à z réel.

Effectivement si z est réel alors z^2 et z^3 sont réels donc les points A, B, C sont alignés.

On a prouvé que dans tous les autres cas les points A, B, C ne sont pas alignés.

- b. Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux, donc si et seulement si $\frac{z^3-z}{z^2-z}$ est imaginaire pur.

Cette propriété s'écrit $z + 1 \in i\mathbb{R}$, donc $z = -1 + iy$ avec $y \in \mathbb{R}$, ou encore $\operatorname{Re}(z) = -1$.

Par exemple si $z = -1 + i$ alors $z^2 = -2i$ et $z^3 = 2 + 2i$, on constate bien graphiquement que le triangle ABC est rectangle en A .

- c. Le triangle ABC est rectangle en B si et seulement si $\frac{z^3-z^2}{z-z^2}$ est imaginaire pur. Comme $\frac{z^3-z^2}{z-z^2} = -z$, alors cette condition signifie que z est imaginaire pur.

Par exemple si $z = i$ alors $z^2 = -1$ et $z^3 = -i$, le triangle ABC est rectangle en B .

14 Quel est l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z tels que

- les points d'affixes z, z^2 et z^4 soient alignés ?
- les points d'affixes $z, \frac{1}{z}$ et $(z - i)$ soient alignés ?

- a. Les complexes $z = 0$ et $z = 1$ satisfont la condition.

Supposons que z est différent de 0 et 1.

Alors les points d'affixes z, z^2 et z^4 sont alignés si et seulement si $\frac{z^4-z}{z^2-z}$ est réel. (On aurait aussi pu considérer $\frac{z^4-z^2}{z-z^2}$ ou $\frac{z^2-z^4}{z-z^4}$).

$$\text{Or : } \frac{z^4-z}{z^2-z} = z^2 + z + 1.$$

On pose $z = x + iy$ avec x et y réels. Alors $z^2 + z + 1 = x^2 - y^2 + x + 1 + iy(2x + 1)$.

Ceci montre que $z^2 + z + 1$ est réel si et seulement si $y = 0$ et $x = -\frac{1}{2}$.

Ainsi z, z^2 et z^4 sont alignés si et seulement si z est réel ou $\operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{2}$.

Il est effectivement évident que si z est réel alors z, z^2 et z^4 sont alignés car dans ce cas ils sont tous réels. Par contre il est moins évident que c'est le cas si $\operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{2}$.

L'ensemble solution est : $\mathcal{S} = \mathbb{R} \cup (-\frac{1}{2} + i\mathbb{R})$.

- b. Dans cette question on suppose que z est non-nul.

Les points d'affixes $z, \frac{1}{z}$ et $(z - i)$ sont alignés si et seulement si $\frac{\frac{1}{z}-z}{(z-i)-z}$ est réel.

$$\text{Or } \frac{\frac{1}{z}-z}{(z-i)-z} = i \frac{1-z^2}{z}.$$

Un complexe est réel si et seulement s'il est égal à son conjugué. Par équivalences :

$$\begin{aligned}
 i \frac{1-z^2}{z} \in \mathbb{R} &\iff i \frac{1-z^2}{z} = -i \frac{1-\bar{z}^2}{\bar{z}} &\iff (1-z^2)\bar{z} = -(1-\bar{z}^2)z \\
 &\iff z + \bar{z} = z\bar{z}(z + \bar{z}) &\iff (z + \bar{z})(|z|^2 - 1) = 0 \\
 &\iff \bar{z} = -z \quad \text{ou} \quad |z| = 1 &\iff z \in i\mathbb{R} \quad \text{ou} \quad z \in \mathbb{U}
 \end{aligned}$$

L'ensemble solution est donc $\mathcal{S} = i\mathbb{R} \cup \mathbb{U} \setminus \{0\}$.

16 Soit ABC un triangle noté dans le sens direct, a, b, c les d'affixes respectives de A, B, C . On note $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Démontrer que la triangle ABC est équilatéral si et seulement si :

$$a + jb + j^2c = 0.$$

Le triangle ABC est équilatéral si et seulement si :

$$\frac{c-a}{b-a} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Par équivalence :

$$\begin{aligned}
 \frac{c-a}{b-a} = e^{i\frac{\pi}{3}} &\iff (1 - e^{i\frac{\pi}{3}})a + e^{i\frac{\pi}{3}}b - c = 0 \\
 &\iff (e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{2\pi}{3}})a + jb - e^{i\frac{\pi}{3}}c = 0 \quad \text{en multipliant par } e^{i\frac{\pi}{3}}
 \end{aligned}$$

On calcule $e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{2\pi}{3}} = 1$ et $-e^{i\frac{\pi}{3}} = j^2$, donc :

$$\frac{c-a}{b-a} = e^{i\frac{\pi}{3}} \iff a + jb + j^2c = 0$$

Il s'agit du résultat attendu.

17 Soit A, B, C trois points d'affixes respectives a, b, c . Soit A', B', C' les milieux des côtés opposés aux points A, B, C .

Soit G le point d'affixe $g = \frac{1}{3}(a + b + c)$, appelé *centre de gravité* du triangle ABC .

- Démontrer que A, A', G sont alignés, de même que B, B', G et C, C', G .
- En déduire que G est l'intersection des trois médianes du triangle ABC , *i.e.*, des droites reliant les points de ce triangle au milieu de leurs côtés opposés.

On note a', b', c' les affixes des points A', B', C' , donc :

$$a' = \frac{b+c}{2} \quad b' = \frac{a+c}{2} \quad c' = \frac{a+b}{2}$$

a. On calcule :

$$\frac{g-a}{a'-a} = \frac{\frac{a+b+c}{3} - a}{\frac{b+c}{2} - a} = \frac{\frac{b+c-2a}{3}}{\frac{b+c-2a}{2}} = \frac{2}{3}$$

Ceci montre que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$, donc les points A, A' , et G sont alignés.

De même on montre que B, B', G sont alignés et C, C', G sont alignés.

- Nous venons de démontrer que G est sur les droites (AA') , (BB') et (CC') , donc G est l'intersection de ces trois droites.

18 En utilisant les résultats des deux exercices précédents, démontrer le *Théorème de Napoléon* :

Soit ABC un triangle. On construit les points A', B', C', U, V, W tels que :

- $A'CB, ACB'$ et $AC'B$ sont les triangles équilatéraux extérieurs à ABC
- U, V et W sont les centres de gravité respectifs de ces triangles.

Alors le triangle UVW est équilatéral.

On note $a, b, c, a', b', c', u, v, w$ les affixes respectives des points $A, B, C, A', B', C', U, V, W$.

On suppose que le triangle ABC est dans le sens direct, ce qui ne change pas le résultat.

Par construction les triangles $A'CB, ACB'$ et $AC'B$ sont directs, et comme ils sont équilatéraux, d'après l'exercice 16 :

$$a' + jc + j^2b = 0 \quad a + jc + j^2b' = 0 \quad a + jc' + j^2b = 0$$

Comme $j^3 = 1$ on en déduit :

$$a' = -jc - j^2b \quad b' = -ja - j^2c \quad c' = -j^2a - jb$$

Les points U, V, W étant les centres de gravités des triangles respectifs $A'CB, ACB'$ et $AC'B$:

$$u = \frac{a' + b + c}{3} \quad v = \frac{a + b' + c}{3} \quad w = \frac{a + b + c'}{3}$$

On en déduit :

$$u = \frac{(1-j)c + (1-j^2)b}{3} \quad v = \frac{(1-j)a + (1-j^2)c}{3} \quad w = \frac{(1-j)b + (1-j^2)a}{3}$$

On peut maintenant calculer :

$$\begin{aligned} u + jv + j^2w &= \frac{1}{3} [(1-j)c + (1-j^2)b + j((1-j)a + (1-j^2)c) + j^2((1-j)b + (1-j^2)a)] \\ &= \frac{1}{3} ((1-j)c + (1-j^2)b + (j-j^2)a + (j-1)c + (j^2-1)b + (j^2-j)a) = 0 \end{aligned}$$

Comme $u + jv + j^2w = 0$ alors d'après l'exercice 16 le triangle UVW est équilatéral.