

Intégrales généralisées et intégrabilité

PC* - Lycée Bellevue - Octobre 2026

6 octobre 2026

Table des matières

1	Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux	1
2	Intégrales généralisées : Premières propriétés	1
3	Absolue convergence	1
3.1	Le théorème fondamental	1
3.2	La semi-convergence	1
4	Intégrabilité	2
4.1	Généralités	2
4.2	Intégrales de référence	2
4.2.1	Intégrales généralisées de Riemann et filiation	2
4.2.2	Intégrales généralisées de type exponentiel	3
4.2.3	Intégrabilité sur $]0,1]$ ou $]0,a]$, $a>0$ du logarithme	3
4.3	Intégrabilité et comparaison	3
4.4	Exemples	4
4.5	Espaces de fonctions intégrables	5
4.5.1	Aspects algébriques	5
4.5.2	Structure d'espace vectoriel normé	5
4.5.3	Structure d'espace préhilbertien	6
5	Séries et Intégrales généralisées	6
5.1	Cas des fonctions positives	6
5.2	Caractérisation de l'intégrabilité sur un intervalle $[a, +\infty[$	7
5.3	Analogie Série-IG et en seconde lecture	8

Il est fort probable que la numérotation des paragraphes utilisée ici ne corresponde pas à celle du cours déjà traité mais la matière, elle, est parfaitement cadrée.

1 Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux

2 Intégrales généralisées : Premières propriétés

3 Absolue convergence

3.1 Le théorème fondamental

3.2 La semi-convergence

Comme pour les séries on dispose du concept de semi-convergence ; ce dernier reste marginal dans le programme.

On considère I un intervalle semi-ouvert ou ouvert non vide et $f \in C_M(I, \mathbb{K})$.

Définition 1 *L'intégrale généralisée $\int_I f$ est semi-convergente si elle converge sans converger absolument.*

Exemple 1 *L'intégrale de Dirichlet $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ en est le prototype (exercices 46 et 47 du TD 5) mais sa non convergence absolue ne se révèle pas aussi simple que cela à prouver.*

En revanche et si $(a, \alpha) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, il est assez aisé de vérifier que :

Proposition 1 i) $\int_a^\infty \frac{e^{ix}}{x^\alpha} dx$ est ACV ssi $\alpha > 1$.
ii) Elle est semi-convergente sinon.

Preuve 1 i) La convergence absolue ou non résulte de la règle de Riemann en $+\infty$.
ii) Prenons $\alpha \leq 1$. Par intégration par parties généralisée (primitivant l'exp, les fonctions en jeu de classe C^∞ sur notre intervalle et le crochet généralisé possède du sens, limite nulle en $+\infty$), notre IG est de même nature que $\int_a^\infty \frac{e^{ix}}{x^{\alpha+1}} dx$ qui converge absolument par le i) donc....

4 Intégrabilité

Ici I est un intervalle non trivial quelconque.

4.1 Généralités

Définition 2 (Intégrabilité)

Convenons d'appeler intégrable sur un intervalle I toute fonction $f \in C_M(I, \mathbb{K})$ telle que l'intégrale généralisée ou pas $\int_I |f(t)| dt$ ait du sens.

Leur ensemble se note $L^1(I, \mathbb{K})$.

Remarque 1 Sur un segment toute fonction continue par morceaux y est intégrable sinon l'intégrabilité équivaut à l'absolue convergence.

4.2 Intégrales de référence

On reformule dans ce nouveau contexte la notion d'intégrale généralisée de référence.

4.2.1 Intégrales généralisées de Riemann et filiation

α étant un réel :

Proposition 2 o) $t \rightarrow \frac{1}{t^\alpha}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

i) L'intégrale généralisée $\int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

ii) L'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

Autrement dit :

Corollaire 1 $a > 0$ étant donné :

i) $t \rightarrow \frac{1}{t^\alpha} \in L^1([0, a]) \iff \alpha < 1$.

ii) $t \rightarrow \frac{1}{t^\alpha} \in L^1([a, +\infty[) \iff \alpha > 1$.

De là par changement de variable affine pertinent et assez évident (les intégrandes étant continues et positives sur $]a, b[$) :

Corollaire 2 $a < b$ étant des réels

i) L'intégrale généralisée $\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$ converge ssi $\alpha < 1$.

ii) $\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha}$ converge ssi $\alpha < 1$.

Il est aisé de traduire ce corollaire en terme d'intégrabilité.

4.2.2 Intégrales généralisées de type exponentiel

Proposition 3 α étant un complexe :

o) $t \rightarrow e^{-\alpha t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

$\int_0^\infty e^{-\alpha t} dt$ converge (ACV) si et seulement si $\Re(\alpha) > 0$, dans ce cas $\int_0^\infty e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha}$.

Donc dans le même contexte :

Corollaire 3 $t \rightarrow e^{-\alpha t} \in L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}) \iff \Re(\alpha) > 0$.

4.2.3 Intégrabilité sur $]0,1]$ ou $]0,a]$, $a>0$ du logarithme

Proposition 4 o) $\ln$ est continue sur $]0,1]$.

i) $\int_0^1 \ln(t) dt$ converge (absolument aussi).

ii) $\ln \in L^1(]0,1])$.

4.3 Intégrabilité et comparaison

a et b sont des éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ tel que $a < b$. I désigne l'intervalle $[a, b[$ (auquel a est réel) ou l'intervalle $]a, b]$ (cette fois b est réel). Tout découle du principe de comparaison pour les intégrales généralisées de fonctions positives (cf cours).

Proposition 5 $I = [a, b[$

Soient f et g dans $C_M(I, \mathbb{K})$.

i) $\boxed{g \in L^1(I, \mathbb{K}) \text{ et } |f| \leq |g| \text{ au voisinage de } b \implies f \in L^1(I, \mathbb{K})}$

(Contraposée : $\boxed{g \notin L^1(I, \mathbb{K}) \text{ et } |g| \leq |f| \text{ au voisinage de } b \implies f \notin L^1(I, \mathbb{K})}$.)

Plus généralement :

ii) $\boxed{g \in L^1(I, \mathbb{K}) \text{ et } f(x) = O(g(x)) \underset{x \rightarrow b}{\implies} f \in L^1(I, \mathbb{K})}$

iii) $\boxed{g \in L^1(I, \mathbb{K}) \text{ et } f(x) = o(g(x)) \underset{x \rightarrow b}{\implies} f \in L^1(I, \mathbb{K})}$

iv) $\boxed{|f(x)| \underset{x \rightarrow b}{\sim} |g(x)| \implies \int_I |f| \text{ et } \int_I |g| \text{ sont de même nature.}}$

Remarque 2 On dispose des mêmes principes de comparaison sur $I =]a, b]$, il suffit de remplacer b par a dans les hypothèses de comparaison dans la proposition précédente.

Une conséquence du résultat précédent il s'obtient par comparaison avec les intégrandes des intégrales généralisées de Riemann.

Corollaire 4 (Règle du x^α en $+\infty$)

Soient $c > 0$ et $f \in C_M([c, +\infty[, \mathbb{K})$.

i) $\boxed{\exists \alpha > 1 \text{ tel que } x^\alpha f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \implies f \in L^1([c, +\infty[, \mathbb{K})}$

ii) $\boxed{\exists \alpha \leq 1 \text{ tel que } x^\alpha |f(x)| \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \implies f \notin L^1([c, +\infty[, \mathbb{K})}$

Remarque 3 On dispose d'une règle analogue en 0 que je vous laisse énoncer.

Pour bien utiliser ces principes, il faut disposer de fonctions connues comme étant intégrables. C'est là qu'interviennent les intégrales de référence.

4.4 Exemples

On notera systématiquement f l'intégrande.

Exemple 2 (Intégrale de Gauss)

Nature de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$?

On note que f est continue (donc CM) et positive sur $\mathbb{R}_+$.

Une seule borne problématique : $+\infty$.

Pour $t \geq 1$ (puisque dans ce cas $t \leq t^2$) nous avons $|f(t)| = e^{-t^2} \leq e^{-t}$. la fonction majorante est notoirement intégrable sur $[1, +\infty[$ donc par comparaison, notre IG CV■

Exemple 3 (Dans la même veine)

Etudions l'intégrabilité sur $\mathbb{R}$ de $f : t \rightarrow e^{-t^2+it}P(t)$, où $P \in \mathbb{R}[X]$.

f est notoirement continue sur $\mathbb{R}$.

Par croissance comparée $t^2 f(t) \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{} 0$ donc en $\pm\infty$ $f(t) = o(1/t^2)$. L'intégrabilité sur $[1, +\infty[$ et $]-\infty, -1]$ de $t \rightarrow 1/t^2$ nous assure de celle de f sur $\mathbb{R}$ ■

Exemple 4 Nature de $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x^3)}$?

f est continue (donc CM) et positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

Deux bornes problématiques 0 et $+\infty$.

En 0, f n'a pas de limite finie (pas d'espoir de fausse singularité donc) mais $|f(x)| \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$. On sait que $x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $]0, 1]$, donc par comparaison, $\int_0^1 |f(x)| dx$ converge soit aussi $\int_0^1 f(x) dx$.

En $+\infty$: $|f(x)| \sim \frac{1}{x^{5/2}}$; comme $x \rightarrow \frac{1}{x^{5/2}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, on a, par le même principe de comparaison, la convergence de $\int_1^{+\infty} f(x) dx$.

Conclusion $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x^3)}$ converge■

Exemple 5 (La fonction Gamma : épisode 2)

On pose sous réserve de sens $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$.

Montrons que Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ exactement.

f , l'intégrande, se révèle continue et positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

Nous allons montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge ssi $x > 0$.

a) Nature de $\int_0^1 f(t) dt$?

En 0 : $f(t) \sim t^{x-1}$ (puisque $e^{-t} \rightarrow 1$) soit aussi $f(t) \sim \frac{1}{t^{1-x}}$ et par Riemann en 0 : $\int_0^1 \frac{dt}{t^{1-x}}$ (A)CV ssi

$1-x < 1$ donc par comparaison $\int_0^1 f(t) dt$ (A)CV ssi $x > 0$.

b) Nature de $\int_1^{+\infty} f(t) dt$?

Par croissance comparée usuelle $t^2 f(t) = \frac{t^{x+1}}{e^t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$ donc $f(t) = o(1/t^2)$ en $+\infty$ et l'intégrabilité sur $[1, +\infty[$ de $t \rightarrow \frac{1}{t^2}$ nous assure par comparaison la convergence de $\int_1^{+\infty} f(t) dt$, ce pour tout réel x .

c) Bilan : $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ CV ssi $x > 0$ et Γ est donc définie uniquement sur $\mathbb{R}_+^*$ ■

Exemple 6 (Intégrales de Bertrand)

On va prouver que $\int_2^\infty \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ converge ssi $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

En effet :

o) $f : t \rightarrow \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ est continue et positive sur $I = [2, +\infty[$.

i) Si $\alpha > 1$ alors pour $\gamma = \frac{1+\alpha}{2} > 1$ alors $t^\gamma f(t) = \frac{1}{t^{\frac{\alpha-1}{2}} (\ln t)^\beta} \rightarrow 0$ si $t \rightarrow +\infty$, ce par croissance

comparée ; d'où l'intégrabilité de f sur I par la règle du t^γ et la convergence de $\int_2^\infty f$.

ii) Si $\alpha < 1$ alors $tf(t) \rightarrow +\infty$ si $t \rightarrow +\infty$ donc la même règle confirme la non intégrabilité de f sur I donc (positivité de f) la divergence de notre IG.

iii) Pour $\alpha = 1$ et $\beta \neq 1$, on dispose en $g : t \in I \rightarrow \frac{(\ln(t))^{1-\beta}}{1-\beta}$ d'une primitive sur I de f et g possède une limite finie en $+\infty$ ssi $1-\beta < 0$ d'où la CNS souhaitée de convergence pour notre IG dans ce sous-cas.

iv) $\alpha = \beta = 1$. Une primitive de f sur I est $h : t \rightarrow \ln(\ln(t))$ de limite $+\infty$ en $+\infty$. Donc divergence de l'intégrale de Bertrand pour ce dernier cas ■

4.5 Espaces de fonctions intégrables

4.5.1 Aspects algébriques

Proposition 6 (Structure d'espace vectoriel) i) $L^1(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $C_M(I, \mathbb{K})$.

On définit $L^2(I, K)$ comme l'ensemble des fonctions f continues par morceaux sur I de carré intégrable sur I i.e telles que $f^2 \in L^1(I, \mathbb{K})$.

ii) $L^2(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $C_M(I, \mathbb{K})$.

iii) En particulier : $(f, g) \in (L^2(I, K))^2 \implies fg \in L^1(I, \mathbb{K})(\heartsuit)$

Remarque 4 La preuve de iii) qui donne ii) repose sur l'inégalité (facile à vérifier) :

$$\forall (a, b) \in C^2, |ab| \leq \frac{|a|^2 + |b|^2}{2}$$

4.5.2 Structure d'espace vectoriel normé

Définition 3 On appelle norme sur E toute application $N : E \rightarrow \boxed{\mathbb{R}_+}$ telle que :

i) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$ (homogénéité).

ii) $N(x) = 0 \implies x = 0_E$ (séparation).

iii) $\forall (x, y) \in E^2, N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire).

La tradition fait qu'une norme générique se note plutôt : $\boxed{\|\cdot\|}$ au lieu de N .

Définition 4 Un espace vectoriel normé (evn en abrégé) est la donnée du couple $(E, \|\cdot\|)$, où $\|\cdot\|$ une norme sur E .

On pose $\boxed{L_c^1(I, \mathbb{K}) = L^1(I, \mathbb{K}) \cap C(I, \mathbb{K})}$

Proposition 7 Pour $f \in L_c^1(I, \mathbb{K})$, on pose $\|f\|_1 = \int_I |f|$.

$\|\cdot\|_1$ est une norme de $L_c^1(I, \mathbb{K})$ (norme 1 ou norme de la convergence en moyenne).

Remarque 5 La continuité est seulement nécessaire pour obtenir la séparation.

4.5.3 Structure d'espace préhilbertien

On pose $L_c^2(I, \mathbb{R}) = L^1(I, \mathbb{R}) \cap C(I, \mathbb{R})$ Grâce notamment au ($\heartsuit$) du iii) de la proposition 6, il vient :

Proposition 8 $(f, g) \in (L_c^2(I, \mathbb{R}))^2 \rightarrow \int_I fg$ définit un produit scalaire sur $L_c^2(I, \mathbb{R})$.

La norme associée à ce produit scalaire est la norme 2 ou norme de la convergence quadratique, elle se note $\|\cdot\|_2$.

Exercice 1 (Version complexe)

Pour $f \in L_c^2(I, \mathbb{C})$, on pose $\|f\|_2 = \sqrt{\int_I |f|^2}$.

Etablir que $\|\cdot\|_2$ est une norme sur $L_c^2(I, \mathbb{C})$.

(Seule difficulté, l'inégalité triangulaire que vous prouverez avec inégalité triangulaire et l'inégalité de Cauchy-Schwarz valable dans l'espace préhilbertien défini dans la proposition précédente.)

5 Séries et Intégrales généralisées

5.1 Cas des fonctions positives

On se donne f continue sur $[m, +\infty[, \mathbb{R}_+$, où $m \in \mathbb{N}$.

Théorème 1 (Comparaison série - intégrale)

On suppose de plus que f est décroissante sur $[m, +\infty[$.

L'intégrale généralisée $\int_m^\infty f(x)dx$ converge ($\iff f \in L^1([m, +\infty[, \mathbb{R})) \iff$ la série $\sum_{n \geq m} f(n)$ converge.

Preuve 2 La décroissance de f fait que $\int_k^{k+1} f \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f$ (1), ce pour $k \geq m+1$ (pour l'inégalité de gauche c'est pour $k \geq m$). Posons alors $S_n = \sum_{k=m}^n f(k)$ et $F(x) = \int_m^x f(t)dt$ pour n entier naturel et x réel plus grands que m .

On sait que la STP $\sum_{n \geq m} f(n)$ converge si et seulement si la suite (S_n) est majorée et que l'IG $\int_m^\infty f(x)dx$ converge si et seulement si F est majorée et comme cette dernière est croissante, cela équivaut au caractère majoré (ou non) de la suite $(F(n))$. En sommant l'encadrement (1) il vient $F(n) \leq S_{n-1}$ et $S_n \leq f(m) + F(n)$ pour n assez grand; ce qui montre que la suite (S_n) est majorée ssi la suite $(F(n))$ l'est d'où le théorème avec les rappels donnés plus haut ■

Remarque 6 Ce théorème peut servir dans les deux sens mais il est surtout pertinent dans le sens intégrale $\rightarrow$ série.

i) Il permet de montrer sobrement que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln^2(n)}$ converge et, de façon plus générale, d'étudier la nature des séries de Bertrand.

ii) Noter qu'on peut l'utiliser pour obtenir le cas échéant des équivalents (de sommes partielles de séries divergentes ou de restes de séries convergentes; les séries de Riemann et de Bertrand sont de bonnes clientes de ce procédé).

5.2 Caractérisation de l'intégrabilité sur un intervalle $[a, +\infty[$

On se donne $f \in \mathbb{C}_M([a, +\infty[, \mathbb{K})$.

On dira qu'une suite (x_n) à termes dans $I = [a, +\infty[$ est **adaptée** à I si elle tend vers $+\infty$ en croissant.

Théorème 2 Soit (x_n) une suite adaptée à I .

Il y a équivalence entre :

i) $f \in L^1([a, +\infty[= I, \mathbb{K})$.

ii) La série $\sum_{n \geq 0} \int_{x_n}^{x_{n+1}} |f(x)| dx$ converge.

Dans ce cas la série $\sum_{n \geq 0} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x) dx$ converge (car ACV) et on a : $\int_{x_0}^{\infty} f(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x) dx$.

Preuve 3 On pose (S_n) la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 0} \int_{x_n}^{x_{n+1}} |f(t)| dt$ et $F(x) = \int_{x_0}^x |f(t)| dt$, ce pour $x \geq x_0$. L'intégrabilité de f équivaut au fait que F soit majorée ou (par croissance de F) que la suite $(F(x_n))$ le soit. Comme (Chasles), pour tout n , $F(x_n) = S_n$, l'équivalence entre i) et ii) en découle par CNS de convergence sur la suite des sommes partielles d'une STP $\square$

Plaçons nous dans le cas de convergence.

La série $\sum_{n \geq 0} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x) dx$ est alors ACV par inégalité triangulaire et comparaison à $\sum_{n \geq 0} \int_{x_n}^{x_{n+1}} |f(x)| dx$ qui est donc convergente par hypothèse.

Dès lors l'égalité (Chasles), pour tout m , $\sum_{n=0}^m \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_m} f(x) dx$ donne (en faisant tendre m vers $+\infty$) la relation désirée $\blacksquare$

Exemple 7 (Hardy et Dirichlet)

On peut utiliser ce théorème pour prouver, par exemple, que l'intégrale généralisée $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^6(\sin x)^2}$ converge ; ce qui ne va pas de soi.

Dans le même ordre d'idée, on peut grâce à lui, vérifier que $x \rightarrow \frac{\sin x}{x}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$; dans les deux cas on utilise la suite $(x_n = n\pi)$, adaptée à $\mathbb{R}_+$.

Intégrale de Hardy (délicat)

La fonction $f : x \geq 0 \mapsto \frac{1}{1+x^6(\sin x)^2}$ est continue et positive. Seul $+\infty$ pose problème et comme la convergence de $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^6(\sin x)^2}$ équivaut à l'intégrabilité de f sur $\mathbb{R}_+$, il nous suffit de montrer que la STP de terme général $u_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x) dx$ converge.

Fixons $n \in \mathbb{N}$ et effectuons dans u_n le changement de variable : $x = t + n\pi$.

Il vient alors $u_n = \int_0^{\pi} \frac{dt}{1+(t+n\pi)^6 \sin^2(t)} \leq \int_0^{\pi} \frac{dt}{1+(n\pi)^6 \sin^2(t)} = v_n$. Ainsi, par comparaison des STP, il nous suffit de montrer que $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge pour conclure.

Toujours, pour tout n , par π -périodicité et parité de l'intégrande $v_n = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+(n\pi)^6 \sin^2(t)}$. Afin de majorer v_n nous allons utiliser l'inégalité $\sin(t) \geq \frac{2t}{\pi}$ valable (concavité sinus sur $I = [0, \frac{\pi}{2}]$) sur I .

Dès lors $\forall n$, $v_n \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+(2\pi^2 n^3 t^2)^2} = \frac{1}{\pi^2 n^3} \left[\arctan(2\pi^2 n^3 t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \leq \frac{1}{2\pi n^3} = O(1/n^3)$.

Par comparaison $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge et ainsi $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^6(\sin x)^2}$ converge $\square$

Exemple 8 (Suite)**Intégrale de Dirichlet**

Posons $f : x \rightarrow \frac{|\sin x|}{x}$; cette fonction est continue sur I en la prolongeant par 1 en 0 et positive.

On pose à nouveau et pour tout n $u_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} |f(x)| dx$; en effectuant dans u_n le changement de variable

$$x = t + n\pi, \text{ il vient } u_n = \int_0^\pi \frac{\sin(t) dt}{t + n\pi}.$$

Dans ce contexte et par simple minoration intégrande $u_n \geq \int_0^\pi \frac{\sin(t) dt}{(n+1)\pi} = \frac{2}{n+1} = v_n$.

La série $\sum_{n \geq 0} v_n$ divergeant, il en va de même pour la STP $\sum_{n \geq 0} u_n$ ce qui entraîne, par le théorème précédent, la non intégrabilité de f sur I ■

Remarque 7 On peut étendre le théorème précédent dans le sens suivant :

Si $\int_a^\infty f$ converge alors $\sum_{n \geq 0} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t) dt$ converge et $\int_{x_0}^\infty f(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x) dx$ reste d'actualité.

En revanche $\sum_{n \geq 0} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t) dt$ peut converger sans que $\int_a^\infty f$ converge. Prendre, pour $x \geq 0$, $f(x) = (-1)^{[x]}$ et $(x_n = 2n)$ puis $(x_n = n)$.

5.3 Analogie Série-IG et en seconde lecture

Nous allons la présenter sous forme de tableaux :

u_n (TG)	$\sum_{n \geq 0} u_n$	$\left\{ \begin{array}{c} \sum_{k=0}^n u_k \\ \text{(Somme partielle)} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{c} \sum_{n=0}^\infty u_n \\ \text{(Somme si CV)} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{c} \sum_{k=n+1}^\infty u_k \\ \text{(Reste si CV)} \end{array} \right.$	ACV
f (Intégrande)	$\int_0^\infty f$	$\int_0^x f(t) dt$	$\left\{ \begin{array}{c} \int_0^\infty f(t) dt \\ \text{(Valeur si CV)} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{c} \int_0^\infty f(t) dt \\ \text{(si CV)} \end{array} \right.$	ACV

Et	$\sum_{n \geq 0} u_n$	Comparaison sur $ u_n $	règle n^{alpha}	Télescopage	Transformation d'Abel
	$\int_0^\infty f$	Comparaison sur $ f $	règle x^{alpha}	Primitivation	Intégration par parties

Au delà de ces analogies terminologiques (que l'on pourrait poursuivre), on peut voir la théorie des séries (non grossièrement divergentes) comme une partie de celle des intégrales généralisées. En effet soit une série $\sum_{n \geq 0} u_n$ à termes complexes et non grossièrement divergente ; on définit alors la fonction f sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x) = u_n \text{ si } x \in [n, n+1[, \text{ ce pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

f est bien continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et, en posant $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ pour tout $x \geq 0$, il vient

$$F(x) = \sum_{k=0}^n u_k + (x - n)u_{n+1}, \text{ où } n \text{ désigne la partie entière de } x.$$

Ceci montre l'équivalence $\sum_{n \geq 0} u_n \text{ converge} \iff \int_0^\infty f(t) dt \text{ converge}.$

On observera en outre que les convergences absolues se correspondent également.