
DL2 (2 heures max). Grand classique de l'intégration

Le but poursuivi est de prouver la formule de Stirling et de calculer l'intégrale de Gauss

1 Intégrales de Wallis

On pourra se reporter à son cours pour traiter rapidement cette partie.

Pour tout entier naturel n , on pose : $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$.

- 1) Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$.
- 2) En déduire, pour tout entier naturel p , une expression explicite de W_{2p} et W_{2p+1} .
- 3) Prouver que (W_n) est une suite convergente dont on ne demande pas (encore) la limite.
- 4) Démontrer que, $\forall n \geq 0$, $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$.
- 5) Vérifier que la suite $((n+1)W_n W_{n+1})$ est constante.
- 6) Déterminer alors un équivalent de W_n pour $n \rightarrow \infty$ ainsi que la limite de (W_n) .
- 7) Tirer de ce qui précède la formule de Wallis : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{4n}(n!)^4}{n((2n)!)^2} = \pi$.

2 Formule de Stirling

Pour n entier naturel non nul, on pose : $u_n = \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}$ et $v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.

- 8) Trouver un équivalent simple de v_n et donner la nature de la série $\sum_{n \geq 1} v_n$.
- 9) Etablir alors que (u_n) converge vers une limite non nulle.
- 10) En déduire la formule de Stirling.
- 11) On jette $2n$ fois une pièce équilibrée. Quelle est la probabilité p_n d'obtenir autant de fois pile que face? Donner un équivalent de p_n si $n \rightarrow +\infty$. Interprétation?

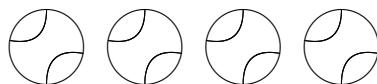
3 Intégrale de Gauss

12) A l'aide d'une célèbre inégalité, vérifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t, 0 \leq t \leq \sqrt{n}, \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}.$$

13) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt$ et $J_n = \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt$.

14) Donner enfin la valeur de l'intégrale (généralisée) de Gauss, à savoir $\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt$.



Challenge Carambar 2

On admet (mais vous pouvez le vérifier) qu'une suite (s_n) à termes complexes, telle que les suites extraites (s_{3n}) , (s_{3n+1}) et (s_{3n+2}) convergent vers la même limite, converge.

Soient $s \in]0, 1]$ et pour tout $n \geq 1$ $u_n = \frac{j^n}{n^s}$ ainsi que $v_n = u_{3n-2} + u_{3n-1} + u_{3n}$.

a) Etablir que la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge.

b) En déduire la nature de $\sum_{n \geq 1} u_n$.



Solution DL2 :

1) Voir son cours $\square$

2) La formule obtenue en 1) permet d'exprimer W_{2p} (resp. W_{2p+1}) en fonction de W_0 (resp. de W_1), ce pour tout entier naturel p . En effet, on a, par emploi répété de cette formule :

$$W_{2p+2} = \frac{(2p+1) \times \dots \times 1}{(2p+2) \times \dots \times 2} W_0 = \frac{(2p+2)!}{((2p+2) \times \dots \times 2)^2} W_0.$$

Mais $(2p+2) \times \dots \times 2 = 2^{p+1}((p+1) \times \dots \times 1) = 2^{p+1}((p+1)!)$ donne $W_{2p+2} = \frac{(2p+2)!}{2^{2p+2}((p+1)!)^2} W_0$, ce pour tout entier p . Avec $p+1 \leftarrow p$, et en constatant que l'égalité proposée est bien vérifiée pour $p=0$, il

vient : $W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2}$. De la même façon, $W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$, tout cela pour $p \in \mathbb{N}$ $\square$

3) Pour tout entier n et tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$: $0 \leq (\sin t)^{n+1} \leq (\sin t)^n$; ainsi par croissance de l'intégrale, $0 \leq W_{n+1} \leq W_n$. Par conséquent, en tant que suite décroissante et minorée par 0, (W_n) converge vers une limite positive $\square$

4) La question 2), par exemple, montre que les W_n sont tous strictement positifs ainsi par 3) :

$$\forall n \geq 0, \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1.$$

Par décroissance de (W_n) , nous obtenons $\frac{W_{n+1}}{W_n} \geq \frac{W_{n+2}}{W_{n+1}} \stackrel{\text{cf 1)}}{=} \frac{n+1}{n+2}$, ce pour tout n .

En résumé dans ce même contexte : $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$ $\square$

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$(n+2)W_{n+2}W_{n+1} \stackrel{\text{cf 1)}}{=} (n+2)\frac{n+1}{n+2}W_nW_{n+1} = (n+1)W_{n+1}W_n$ ainsi $((n+1)W_{n+1}W_n)_n$ est bien une suite constante (égale à $\frac{\pi}{2}$) $\square$

6) L'encadrement de 4), combiné avec le théorème des gendarmes, donne $W_n \sim W_{n+1}$.

En injectant ceci dans l'égalité $(n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}$ implique : $n(W_n)^2 \sim \frac{\pi}{2}$.

De là ($W_n > 0$), on tire l'équivalent classique $W_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Par conséquent $W_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ $\square$

7) De $W_{2n}^2 \sim \frac{\pi}{4n}$ et de l'expression exacte de W_{2n} , obtenue en 2), nous déduisons :

$$\frac{(2n!)^2}{2^{4n}(n!)^4} \frac{\pi^2}{4} \sim \frac{\pi}{4n} \text{ soit aussi } \frac{2^{4n}(n!)^4}{n(2n!)^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \pi.$$

Cette dernière formule, attribuée à Wallis ¹, permet, en théorie, d'obtenir des approximations rationnelles de π assez peu maniables car difficiles à calculer (factorielles) et, c'est à tester par soi-même, de convergence plutôt lente $\square$

8) On a, pour n assez grand :

$$v_n = \ln\left(e^{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1/2}}\right) = 1 - (n+1/2) \ln(1+1/n) = 1 - (n+1/2)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ainsi $v_n \sim -\frac{1}{12n^2}$ donc par comparaison avec une série de Riemann ACV, $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge $\square$

¹ John Wallis (1616-1703); sa formule date de 1655.

9) Grâce au lien suite série il résulte que la suite $(\ln(u_n))$ converge vers un réel L donc, par composition des limites que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \boxed{e^L > 0} \square$

10) Par définition de u_n et avec 9): $n! \sim e^L \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ et $(2n)! \sim e^L \sqrt{2n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}$.

En injectant ces équivalents dans la formule de Wallis, il vient : $\boxed{e^L = \sqrt{2\pi}}$. La formule de Stirling en découle $\square$

11) La probabilité d'obtenir pile (ou face) pour chaque lancer est donc de $1/2$. Par simple utilisation de la loi binomiale : $p_n = \binom{2n}{n} 2^{-2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$ dont un équivalent est $\boxed{\frac{1}{\sqrt{\pi n}}}$, avec la formule de Stirling. Il en résulte que cette équirépartition des lancers sur le long terme a peu de chance d'être obtenue $\square$

12) L'inégalité en question est (1) : $e^x \geq x + 1$ pour tout réel x .

La première inégalité s'obtient avec $x = -\frac{t^2}{n}$ dans (1) et en utilisant la croissance de $u \rightarrow u^n$ sur $\mathbb{R}_+$.
Même protocole pour la seconde avec $x = \frac{t^2}{n}$ $\square$

13) Pour I_n aucun problème de sens puisqu'on intègre une fonction continue sur un segment. Pour la calculer on effectue le changement de variable $t = \sqrt{n} \cos u, u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et il vient $\boxed{I_n = \sqrt{n} W_{2n+1}}$.

En ce qui concerne l'intégrale généralisée, on utilise le changement de variable légitime $t = \sqrt{n} \tan u$. Dès lors cette intégrale généralisée est de même nature que $\sqrt{n} \int_0^{\pi/2} (1 + \tan^2 u)^{-n+1} du = \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} (\cos u)^{2n-2} du$ qui converge (intégrande continue sur le segment) et dont la valeur est $\sqrt{n} W_{2n-2} = J_n$, tout ceci pour tout $n \geq 1$ $\square$

14) La nature de cette intégrale généralisée nous est bien connue.

En vertu de 12) $\forall n \geq 1, I_n \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq J_n$.

6) et 13) combinés aux gendarmes donnent $\boxed{\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$ et aussi $\boxed{\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}}$ ■