

TD5 : Intégrales Généralisées corrigé 1

Exercice 46 (Intégrale de Dirichlet)

Pour $0 < x \leq \pi$, on pose $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}}$.

1) Montrer que f se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $[0, \pi]$.

Pour n entier naturel, on pose $I_n = \int_0^\pi \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin \frac{t}{2}} dt$.

2) Etablir la convergence de cette intégrale généralisée.

3) En calculer la valeur en étudiant celle de $I_{n+1} - I_n$.

4) En utilisant le lemme de Riemann-Lebesgue (cf cours), vérifier que $\int_0^\pi f(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

On pose, pour $x > 0$, $F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$.

5) Prouver que la suite $(F(\frac{(2n+1)\pi}{2}))$ converge et déterminer sa limite.

6) Pour tout réel $x > 0$, on note n_x l'unique entier naturel n tel que $\frac{(2n+1)\pi}{2} \leq x < \frac{(2n+3)\pi}{2}$.

Par majoration, montrer que $F(x) - F(n_x)$ tend vers 0 si $x \rightarrow +\infty$.

7) Dédurre de ce qui précède la convergence de $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ ainsi que sa valeur.

Solution : 1) On note déjà que $f \in C^1([0, \pi])$ et $f(x) = \frac{2 \sin \frac{x}{2} - x}{2x \sin \frac{x}{2}} = \frac{o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = o(1)$, ceci pour $x \rightarrow 0$.

Il en ressort que l'on prolonge f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

Enfin, pour $x \in]0, \pi]$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{\cos \frac{x}{2}}{4(\sin \frac{x}{2})^2} = \frac{4(\sin \frac{x}{2})^2 - x^2 \cos \frac{x}{2}}{4x^2(\sin \frac{x}{2})^2} = \frac{x^4/24 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{24}$.

Grâce au théorème du prolongement des fonctions C^1 , il en résulte que f , c'est encore le nom du prolongement de f à $[0, \pi]$, est de classe C^1 sur ce même segment.

2) L'intégrande est continue sur $]0, \pi]$ et possède une limite finie en 0 : $2n+1$. Il y a donc fausse singularité en 0 et l'intégrale généralisée converge.

3) Pour tout n :

$I_{n+1} - I_n = \int_0^\pi \frac{\sin(\frac{2n+3}{2}t) - \sin(\frac{2n+1}{2}t)}{\sin \frac{t}{2}} dt \stackrel{\text{trigo}}{=} 2 \int_0^\pi \frac{\cos(\frac{2n+2}{2}t) \sin \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} dt = 2 \int_0^\pi \cos((n+1)t) dt = 0$. On en déduit que la suite (I_n) est constante, comme $I_0 = \pi$, on a pour tout n , $I_n = \pi$.

4) Consulter son cours.

5) En utilisant 4) il vient $\int_0^\pi f(t) \sin \frac{2n+1}{2}t dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et en utilisant l'expression de f que l'on scinde en deux (les 2 IG convergeant), on obtient $\int_0^\pi \frac{\sin \frac{2n+1}{2}t}{t} dt - \frac{I_n}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Leftrightarrow \int_0^\pi \frac{\sin \frac{2n+1}{2}t}{t} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$, ce avec 3).

Le changement, à n fixé, de variable $t = \frac{2u}{2n+1}$ dans $F(\frac{(2n+1)\pi}{2})$ donne alors :

$$F\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}.$$

On pose, pour tout n , $a_n = (2n+1)\pi/2$.

6) Par inégalité triangulaire et majoration intégrale et intégrande $|F(x) - F(n_x)| \leq \int_{a_{n_x}}^{a_{n_x+1}} \frac{dt}{t} \leq \frac{\pi}{a_{n_x}}$ qui tend vers 0 si $x \rightarrow \infty$ par gendarmes ($n_x \rightarrow \infty$!).

7) 5) et 6) prouvent que $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$.

Ainsi $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ converge et $\boxed{\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}}$ ■

Exercice 47 (Semi-convergence)

- a) Montrer que l'une des intégrales généralisées $\int_{\pi/2}^\infty \frac{\sin^2 x}{x} dx$ ou $\int_{\pi/2}^\infty \frac{\cos^2 x}{x} dx$ diverge.
 b) A l'aide d'un changement de variable, montrer qu'elles sont aussi de même nature. Conclusion?
 c) En déduire que l'intégrale de Dirichlet est semi-convergente.

Exercice 48 (Type CCINP)

- a) Nature de $\int_0^\infty \ln(thx) dx$?
 b) Pour quelles valeurs du réel α , $\int_0^\infty (\sqrt{x^2 + 4x + 5} - x - 2)^\alpha$ converge-t-elle?
 c) Convergence et valeur de $\int_0^\infty \frac{\arctan x}{x^2 + 1} dx$.
 d) Nature et calcul de $\int_0^\infty \frac{x \ln x}{(1 + x^2)^2} dx$. (Procéder au changement de variable $x = 1/t$)

Solution : On note systématiquement f l'intégrande.

a) La fonction th est de classe C^∞ , impaire et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et d'image $] -1, 1[$.

Il en résulte que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'elle y est négative.

Deux bornes problématiques, à savoir 0 et $+\infty$.

En 0 : $th(x) = x + O(x^3)$ donc $f(x) = \ln(x) + \ln(1 + O(x^2)) \sim \ln(x)$.

Par comparaison, puisque $\int_0^1 \ln(x) dx$ converge, il vient que $\boxed{\int_0^1 f(x) dx \text{ converge}}$.

En $+\infty$, $th(x) \rightarrow 1$ donc par équivalent fondamental ($\ln(u) \sim u - 1$ si $u \rightarrow 1$) $f(x) \sim th(x) - 1$.

Or $th(x) - 1 = -2 \frac{e^{-x}}{e^{-x} + e^x} \sim -2e^{-2x}$ si $x \rightarrow \infty$.

On sait que, ($2 > 0!!!!$), $\int_1^\infty e^{-2x}$ converge donc par comparaison que $\boxed{\int_1^\infty f(x) dx \text{ converge}}$.

Bilan $\boxed{\int_0^\infty \ln(thx) dx \text{ converge}}$ ■

b) Le changement de variable affine $x = t - 2$ fait qu'il nous faut étudier la nature de l'intégrale généralisée $\int_2^\infty f(t) dt$, où on a posé $f(t) = (\sqrt{t^2 + 1} - t)^\alpha$.

f est continue, positive sur $[2, +\infty[$. La seule borne problématique est $+\infty$.

Avec le Dl usuel $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} + o(u)$ en 0, il vient :

$$f(t) = t^\alpha \left(\sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} - 1 \right)^\alpha = t^\alpha \left(1 + \frac{1}{2t^2} + o(1/t^2) \right)^\alpha \sim \frac{1}{2^\alpha t^\alpha}, \text{ ce pour } t \rightarrow \infty.$$

Ainsi la règle de Riemann en $+\infty$ et le principe de comparaison nous assure de la convergence de notre IG ssi $\boxed{\alpha > 1}$ ■

Exercice 49 (Intégrale de Poisson : Centrale)

- a) Démontrer que $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) dt$ et $\int_0^{\pi/2} \ln(\cos t) dt$ convergent.
 b) On note I et J leurs valeurs. En calculant $I + J$, déterminer I et J .

Solution : Fin de b). Nous avons obtenu $I + J = -\frac{\pi \ln(2)}{2} + \frac{1}{2} \int_0^\pi \ln(\sin(u)) du$. Puis, par la relation de Chasles, il vient :

$I + J = -\frac{\pi \ln(2)}{2} + \frac{1}{2} (I + \int_{\pi/2}^\pi \ln(\sin(u)) du)$. Dans la dernière intégrale généralisée on effectue le changement de variable affine $u = v + \pi/2$; ce qui donne $I + J = -\frac{\pi \ln(2)}{2} + \frac{1}{2} (I + J)$. D'où $I + J = -\pi \ln(2)$. Mais on

sait que $I = J$ d'où $\boxed{I = J = -\frac{\pi \ln(2)}{2}}$ ■

Exercice 50 (*Plus théorique*)

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue et décroissante telle que $\int_0^\infty f(x)dx$ converge.

Montrer que $xf(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. On pourra **minorer** $\int_{x/2}^x f(t)dt$.

Solution : Soit $x > 0$. Par positivité et décroissance de f ainsi que la croissance de l'intégrale :

$$0 \leq f(x)(x - x/2) \leq \int_{x/2}^x f(t)dt.$$

Donc $0 \leq xf(x) \leq 2 \int_{x/2}^\infty f(t)dt$ et, grâce au cours et à la convergence de $\int_0^\infty f(x)dx$, nous avons $\int_{x/2}^\infty f(t)dt \rightarrow 0$ si $x \rightarrow \infty$. Le théorème des gendarmes permet de conclure ■