

DS2 (4h).

La rédaction, l'argumentation et la présentation matérielle entrent dans une part significative de la notation; vous devrez aussi respecter la terminologie et les règles d'usage en vigueur. Les exercices, problèmes sont indépendants. Les résultats numériques seront encadrés et simplifiés. Si vous êtes amené à repérer ce qui peut vous sembler une erreur d'énoncé, vous êtes prié de le signaler sur votre copie et devrez poursuivre votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous prendriez.

Calculatrices autorisées.

Exercice 1

- 1) Etablir que, pour tout réel x positif, $\arctan(x) \leq x$.
- 2) Quelle est la nature de la série de terme général donné par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{\arctan(u_n)}{2}$, ce pour tout n ?

Solution : 1) Simple étude de la fonction $x \geq 0 \rightarrow \arctan(x) - x$.

- 2) Grâce à 1) et par récurrence immédiate : $0 \leq u_n \leq \frac{\arctan(u_0)}{2^n}$, ce pour tout n .

Dès lors, comparaison des STP (la série géométrique de raison $1/2$ convergeant), nous obtenons la convergence de $\sum_{n \geq 0} u_n$ ■

Exercice 2

- 1) Prouver l'intégrabilité sur $\mathbb{R}$ de $f : x \rightarrow \frac{\sin^7(x)}{1+x^6}$.
- 2) Valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$?

Solution : 1) f est continue sur $\mathbb{R}$ et impaire; son intégrabilité sur $\mathbb{R}$ découle donc de celle sur $I = [1, +\infty[$. Pour tout $x \geq 1$, $|f(x)| \leq \frac{1}{x^6}$ et $x \rightarrow \frac{1}{x^6}$ étant intégrable sur I , il en va de même, par comparaison pour f .

f est intégrable sur $\mathbb{R}$.

- 2) L'imparité de f montre que la valeur de cette intégrale généralisée est nulle ■

Exercice 3

Soit une série $\sum_{n \geq 1} u_n$ convergente. Pour tout entier naturel n , on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$.

- 1) Soit z un nombre complexe de module strictement inférieur à 1. On suppose dans cette question que $u_n = z^n$, ce pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- a) Préciser R_n pour tout n . La série $\sum_{n \geq 0} R_n$ converge-t-elle? Si oui, en déterminer la somme.

- b) Exprimer, pour tout n , la différence $\sum_{k=0}^n R_k - \sum_{k=1}^n k u_k$ en fonction de n et R_n .

En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{\infty} k z^k$.

Désormais on suppose que $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- 2)a) Montrer que la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} R_n$ entraîne celle de $\sum_{n \geq 1} n u_n$.

- b) On suppose que la série $\sum_{n \geq 1} n u_n$ est convergente.

Quelle est la limite de la suite $((n+1)R_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$?

- c) Prouver que les séries $\sum_{n \geq 0} R_n$ et $\sum_{n \geq 1} n u_n$ sont de même nature.

Comparer leur somme en cas de convergence.

d) Application : soit $s > 1$, étudier le cas où $u_n = \frac{1}{n^s}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On pourra utiliser la notation $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ (fonction ζ de Riemann).

Solution : 1)a) Le cours montre que, pour tout n : $R_n = \frac{z^{n+1}}{1-z}$.

La série géométrique $\sum_{n \geq 0} z^{n+1}$ convergeant (module de raison < 1), il en découle que $\sum_{n \geq 0} R_n$ converge aussi

et sa somme vaut $\boxed{\frac{z}{(1-z)^2}}$.

b) Il fallait penser à observer que $u_k = R_{k-1} - R_k$ pour $k \geq 1$. Dans ces conditions il vient et pour tout n :

$$\sum_{k=0}^n R_k - \sum_{k=1}^n k u_k = \sum_{k=0}^n R_k - \sum_{k=1}^n k(R_{k-1} - R_k) = R_0 - \sum_{k=1}^n (k R_{k-1} - (k+1) R_k) = (n+1) R_n$$
 par télescopage.

On notera que cette relation vaut pour toute série convergente.

Par croissance comparée $(n+1)R_n \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$ donc il en résulte que la somme cherchée est $\boxed{\frac{z}{(1-z)^2}}$.

2)a) Le b) de la question précédente y répond.

b) Le reste d'ordre n de la série convergente $\sum_{n \geq 1} n u_n$ converge vers 0 et il est supérieur à $(n+1)R_n \geq 0$, ce

pour tout n . Le théorème des gendarmes donne 0 pour limite de notre suite.

c) La question précédente et 1)b) montrent que la réciproque à 2)a) est validée.

Et 1)b) toujours montrent que les sommes sont identiques en cas de convergence.

d) De ce qui précède, on déduit qu'il y a convergence pour $\sum_{n \geq 0} R_n$ ssi $s > 2$ et que, dans ce cas, la somme

de cette série vaut $\zeta(s-1)$ ■

Exercice 4

On rappelle que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \gamma$, où γ est la constante d'Euler.

Pour tout entier naturel non nul k , on pose $u_k = \frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$ et $\gamma_n = \sum_{k=1}^n u_k$, ce pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Approximation et expression intégrale de γ

1) Par considération d'aire prouver, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, que $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

2) En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

3) Vérifier que la suite $(\gamma_n)_{n \geq 1}$ est croissante et qu'elle converge vers γ .
 Etablir aussi que $\gamma \in [0, 1]$.

4) Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'existence de $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$.

5) Prouver successivement que :

a) $u_k = \frac{1}{k} \int_0^1 \frac{u}{u+k} du$ pour $k \geq 1$.

b) $\frac{1}{2}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) \leq u_k \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k})$ pour $k \geq 2$.

c) $\frac{1}{2n+2} \leq r_n \leq \frac{1}{2n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

d) (notation du cours) que $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$.

6) Déterminer un entier n permettant d'obtenir une approximation de γ par γ_n avec une précision de 10^{-2} assurément.

7) On pose $v_n = \gamma_n + \frac{1}{2n+2}$, ce pour $n \in \mathbb{N}^*$. Reprendre la question précédente en remplaçant γ_n par v_n .

8) Montrer que les intégrales généralisées $\int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt$ et $\int_1^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ convergent.

On notera I et J leurs valeurs respectives.

9) Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \int_0^1 \frac{1 - (1-v)^n}{v} dv$.

A cet effet on pourra calculer la somme $1 + (1-v) + \dots + (1-v)^{n-1}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, n]$, on pose $e_n(t) = (1 - \frac{t}{n})^n$.

10) Vérifier que pour tout réel v : $1 + v \leq e^v$.

En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, n]$, $(1 - \frac{t^2}{n^2})^n e^{-t} \leq e_n(t) \leq e^{-t}$ puis que $0 \leq e^{-t} - e_n(t) \leq \frac{t^2}{n} e^{-t}$.

11) Démontrer enfin que $\gamma = I - J = \int_0^1 \frac{1 - e^{-t} - e^{-1/t}}{t} dt$.

Une deuxième représentation intégrale de γ

12) Etudier l'intégrabilité sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $t \rightarrow e^{-t} \ln(t)$.

13) A l'aide de l'égalité $\gamma = I - J$, prouver enfin que $\gamma = - \int_0^\infty e^{-t} \ln(t) dt$.

Solution : 1) La décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$ et la croissance de l'intégrale font que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{n} \text{ soit } \frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{n} \text{ d'où } \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \square$$

2) L'encadrement précédent prouve que $u_n = O(1/n^2)$ donc, par comparaison, $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge (absolument) $\square$

3) (γ_n) étant la suite des sommes partielles d'une STP, c'est bien une suite croissante.

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}^*, \gamma_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \right) = H_n - \ln(n+1) = H_n - \ln(n) - \ln(1 + 1/n).$$

Puisque $H_n - \ln(n) - \ln(1 + 1/n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \gamma - 0 = \gamma$, nous avons bien $\boxed{\gamma_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \gamma}$.

L'encadrement de 1) donne, en sommant et en télescopant : $0 \leq \gamma_n \leq 1 - \frac{1}{n+1} \leq 1$, ce pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Par conservation des inégalités à la limite (si $n \rightarrow \infty$), nous obtenons $\boxed{0 \leq \gamma \leq 1} \square$

4) Il s'agit du reste d'ordre n d'une série convergente, il est donc parfaitement défini et $\boxed{r_n = \gamma - \gamma_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^* \square$

5a) Il suffit d'observer que $\frac{u}{u+k} = 1 - \frac{k}{u+k}$ donc que $\int_0^1 \frac{u}{u+k} du = 1 - k(\ln(k+1) - \ln(k)) = ku_k$, ce pour tout $k \in \mathbb{N}^* \square$

b) On fixe l'entier $k \geq 2$ et on remarque que : $\forall u \in [0, 1], \frac{u}{k+1} \leq \frac{u}{u+k} \leq \frac{u}{k-1}$. Donc en intégrant entre 0 et 1 (croissance intégrale), il vient $\frac{1}{2k(k+1)} \leq u_k \leq \frac{1}{2k(k-1)}$, ce qui est aussi l'encadrement souhaité $\square$

c) En sommant de $k = n+1$ à l'infini (séries convergentes) les membres de l'encadrement obtenu en b), il vient (télescopage) $\boxed{\frac{1}{2n+2} \leq r_n \leq \frac{1}{2n}}$, ce pour tout $k \in \mathbb{N}^* \square$

d) Comme remarqué en 2) (et pour tout $n \rightarrow \infty$) $H_n = \ln(n) + \ln(1 + 1/n) + \gamma_n = \ln(n) + \frac{1}{n} + \gamma - r_n + o(1/n)$.

Mais l'encadrement précédent dit que $0 \leq \frac{1}{2n} - r_n \leq \frac{1}{n(2n+2)}$ donc que $r_n - \frac{1}{2n} = o(1/n)$; ainsi en injectant cette information dans le développement asymptotique provisoire de H_n (ci-dessus), nous obtenons

$$\text{bien } \boxed{H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} \square$$

6) Utilisation immédiate de 5)c) qui donne $\boxed{n = 50} \square$

7) L'erreur commise en assimilant γ à v_n est égale à $r_n - \frac{1}{2n+2} \in [0, \frac{1}{n(2n+2)}]$ (toujours par 5)c)) donc

ici : $\boxed{n = 7 \text{ convient et donne } 0,57 \text{ comme approximation de } \gamma; \text{ ce qui est déjà très bon}} \blacksquare$

Exercice 5

Soient a et b deux réels positifs et $f : t > 0 \rightarrow \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$.

1) Vérifier que f se prolonge par continuité en 0. On note g le prolongement par continuité de f à $\mathbb{R}_+$. Préciser g .

2) En étudiant le comportement à l'infini de $t^2 f(t)$, établir que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

3) Soit $x > 0$, prouver que $\int_x^\infty f(t)dt = \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-u}}{u} du$.

4) Montrer alors, par encadrement, que $\int_0^\infty f(t)dt = \ln(\frac{b}{a})$.

5) Existence et calcul de $\int_0^\infty f^2(t)dt$?

Solution : 1) On observe déjà que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'en 0^+ :

$f(t) = \frac{1 - at - (1 - bt) + o(t)}{t} = b - a + o(1)$ donc que $f(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} b - a \in \mathbb{R}$; ce qui montre que f est bien prolongeable par continuité en 0.

Evidemment $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x > 0 \\ b - a & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \square$

2) On a déjà signalé la continuité de f sur $\mathbb{R}_+^*$; 1) montre que 0 est une fausse singularité donc que f est intégrable sur $[0, 1]$.

Par croissance comparée $t^2 f(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ ce qui signifie que $f(t) = o(1/t^2)$ donc que, par comparaison, f est intégrable sur $[1, +\infty[$. Ainsi $\boxed{f \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+^*} \quad \square$

3) Un raisonnement similaire à celui tenu en 2) prouve que $t \rightarrow \frac{e^{-at}}{t}$ et $t \rightarrow \frac{e^{-bt}}{t}$ sont intégrables sur $[x, +\infty[$.

Par linéarité des intégrales généralisées convergentes : $\int_x^\infty f(t)dt = \int_x^\infty \frac{e^{-at}}{t} dt - \int_x^\infty \frac{e^{-bt}}{t} dt$. En effectuant le changement de variable affine $t = \frac{u}{a}$ (resp. $t = \frac{u}{b}$) dans $\int_x^\infty \frac{e^{-at}}{t} dt$ (resp. $\int_x^\infty \frac{e^{-bt}}{t} dt$), il vient

$\int_x^\infty f(t)dt = \int_{ax}^\infty \frac{e^{-u}}{u} du - \int_{bx}^\infty \frac{e^{-u}}{u} du = \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-u}}{u} du$, ce par Chasles $\square$

4) Par Chasles encore $\int_0^\infty f(t)dt - \int_x^\infty f(t)dt = \int_0^x f(t)dt \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ soit aussi $\int_x^\infty f(t)dt \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \int_0^\infty f(t)dt$.

Par ailleurs l'encadrement $1 - u \leq e^{-u} \leq 1$ valable si $u > 0$ conduit, par croissance intégrale, à $\int_{ax}^{bx} \frac{1-u}{u} du \leq \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-u}}{u} du \leq \int_{ax}^{bx} \frac{1}{u} du$ soit $\ln(\frac{b}{a}) - (b-a)x \leq \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-u}}{u} du \leq \ln(\frac{b}{a})$, ce pour $x > 0$; en faisant tendre x vers 0^+ , le théorème des gendarmes et la première partie de cette réponse donnent

$\boxed{\int_0^\infty f(t)dt = \ln(\frac{b}{a})} \quad \square$

5) L'existence de cette nouvelle IG se justifie par les mêmes arguments que ceux donnés en 2).

Pour le calcul, on effectue une IPP généralisée (le crochet généralisé existe cf 1) et croissance comparée et vaut 0) :

$\int_0^\infty f^2(t)dt = \left[-\frac{(e^{-at} - e^{-bt})^2}{t} \right]_0^\infty + 2 \int_0^\infty \frac{(be^{-bt} - ae^{-at})(e^{-at} - e^{-bt})}{t} dt = 2b \int_0^\infty \frac{e^{-(a+b)t} - e^{-2bt}}{t} dt - 2a \int_0^\infty \frac{e^{-2at} - e^{-(a+b)t}}{t} dt$ (par linéarité).

D'où (avec 4)) $\boxed{\int_0^\infty f^2(t)dt = 2(b \ln(2b) + a \ln(a) - (a+b) \ln(a+b))} \quad \blacksquare$

Exercice 6

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (-1)^n \frac{\lfloor \log_2(n) \rfloor}{n}$, où $\log_2$ désigne la fonction logarithme de base 2.

1) Expliquer pourquoi le théorème de Leibniz reste impuissant à montrer la convergence de la série de terme général u_n .

2) Soient n un entier naturel et m un entier tel que : $2^{n+1} \leq m < 2^{n+2}$.

Prouver que $\left| \sum_{k=2^{n+1}}^m \frac{(-1)^k}{k} \right| \leq \frac{1}{2^n}$ puis que $\left| \sum_{k=2^{n+1}}^m u_k \right| \leq \frac{n+1}{2^n}$

On pose alors et pour tout entier naturel n : $v_n = \sum_{k=2^{n+1}}^{2^{n+2}-1} u_k$.

3) Montrer que la série de terme général v_n converge.

4) En déduire (passer par la suite des sommes partielles de $\sum_{n \geq 1} u_n$) la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$.

Solution : 1) la décroissance de la suite $(|u_n|)$ ne semble pas réalisée.

De façon plus précise $|\frac{u_{2^{n+1}}}{u_{2^n}}| = \frac{1 - 1/n}{1 - 2^{-n}} < 1$ puisque $2^n > n$, tout ceci pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ □

2) Considérons $\sum_{k \geq 1} w_k$ telle que $w_k = \begin{cases} \frac{(-1)^k}{k} & \text{si } 1 \leq k \leq m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Une telle série alternée est redevable du théorème de Leibniz et la valeur absolue de son reste d'ordre $2^{n+1} - 1$ est inférieur à la valeur absolue de son terme général d'indice 2^{n+1} ; ce qui donne $|\sum_{k=2^{n+1}}^m \frac{(-1)^k}{k}| \leq \frac{1}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2^n}$.

Puisque pour tout $k \in \llbracket 2^{n+1}, m \rrbracket$, $\lfloor \log_2(n) \rfloor = n + 1$, il vient $|\sum_{k=2^{n+1}}^m u_k| = (n+1) |\sum_{k=2^{n+1}}^m \frac{(-1)^k}{k}| \leq \frac{n+1}{2^n}$,

par ce qui précède □

3) Par la règle du n^2 la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n+1}{2^n}$ est ACV donc, par comparaison (cf 2)), $\sum_{n \geq 0} v_n$ est ACV donc convergente □

4) On note (U_n) (resp. (V_n)) la suite des sommes partielles de $\sum_{n \geq 1} u_n$ (resp. $\sum_{n \geq 0} v_n$). Donnons nous un entier naturel non nul m et considérons n tel que $2^{n+1} \leq m < 2^{n+2}$.

Alors $U_m = V_{n-1} + \sum_{k=2^{n+1}}^m u_k$ donc $|U_m - V_{n-1}| \leq \frac{n+1}{2^n}$. Maintenant si on fait tendre m vers l'infini, il en

va de même pour n et le théorème des gendarmes nous affirme que la suite (U_m) converge alors vers $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$,

ce par 3) aussi; il en résulte que $\sum_{n \geq 1} u_n$ et que $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{k=0}^{\infty} v_k}$ ■

Exercice 7

Soit $u_n = \frac{1}{n^2}$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$, ce pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Etablir que $u_n - \frac{1}{n(n+1)} = O(1/n^3)$ si $n \rightarrow +\infty$.

2) Prouver que si $v_n = O(1/n^3)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ et en notant (K_n) la suite des restes de cette série, on a $K_n = o(1/n)$.

3) En déduire que $R_n \sim \frac{1}{n}$ pour $n \rightarrow +\infty$.

Solution : 1) Evident □

2) Par principe de comparaison $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge absolument, ce qui légitime l'emploi de la suite K_n .

Il existe un réel positif A et un entier naturel non nul m tels que $\forall n \geq m, |v_n| \leq \frac{A}{n^3}$.

Donc et par inégalité triangulaire, pour $n \geq n_0$, $|K_n| \leq A \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \leq A \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{nk^2} \leq \frac{A}{n} V_n$, où V_n est le

reste d'ordre n de la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ (donc $V_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$) et ainsi on a bien vérifié que $\boxed{K_n = o(1/n)}$ □

3) Avec 1) et, pour k assez grand $u_k = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + v_k$ (notations du 2); dès lors, pour n assez grand (on somme sans risque, tout converge) en sommant de $n+1$ à $+\infty$: $R_n = \frac{1}{n+1} + K_n \underset{+ \infty}{\sim} \frac{1}{n}$, avec 2) ■

Exercice 8

Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}$ converge.

Solution : On montre, par IPP comme en TD6, que l'intégrale généralisée $\int_1^{\infty} f(t) dt$ converge, où on

a posé $f(t) = \frac{\sin(\sqrt{t})}{t}$ pour $t \geq 1$.

D'après votre cours on sait alors que la série $\sum_{n \geq 1} (u_n = \int_n^{n+1} f(t)dt)$ converge (Chasles).

On pose enfin $F_n(x) = \int_n^x f(t)dt$, ce pour $(n, x) \in \mathbb{N}^* \times [n, n+1]$; le caractère C^1 de f sur son intervalle de définition nous assure du caractère C^2 de F_n sur $[n, n+1]$, ce pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ alors, pour tout $x \in [n, n+1]$, $F'_n(x) = f(x)$ et $|F''_n(x)| \leq \frac{1}{x^{3/2}}$ et, par inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 :

$|F_n(n+1) - F_n(n) - (n+1-n)F'_n(n)| \leq \frac{(n+1-n)^2}{2} \max_{x \in [n, n+1]} (|F''_n(x)|)$ soit $u_n - f(n) = O(1/n^{3/2})$, ce pour $n \rightarrow +\infty$.

Cette information, combinée à la convergence de $\sum_{n \geq 1} u_n$, nous assure celle de $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}$ ■

FIN