

Devoir à la maison n° 2

CORRIGÉ

Exercice 1.

1. $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$

2. Comme $S_0 = 0, S_1 = 1, S_2 = 3$ et $S_3 = 6$, on en déduit :

$$v_1 = \sum_{k=1}^1 (2k-1) = 1,$$

$$v_2 = \sum_{k=2}^3 (2k-1) = 3 + 5 = 8,$$

$$v_3 = \sum_{k=4}^6 (2k-1) = 7 + 9 + 11 = 27.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme la suite $(2k-1)_{k \in \mathbb{N}}$ est arithmétique, on a :

$$v_n = \underbrace{(S_n - (S_{n-1} + 1) + 1)}_{\text{nombre de termes}} \underbrace{\frac{(2(S_{n-1} + 1) - 1) + (2S_n - 1)}{2}}_{\text{moyenne des termes extrémaux}} = (S_n - S_{n-1})(S_n + S_{n-1}).$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $S_n - S_{n-1} = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n$ et $S_n + S_{n-1} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2$,
donc $v_n = (S_n - S_{n-1})(S_n + S_{n-1}) = n^3$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après les résultats précédents, et par somme télescopique :

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \sum_{k=1}^n v_k = \sum_{k=1}^n (S_k - S_{k-1})(S_k + S_{k-1}) = \sum_{k=1}^n S_k^2 - S_{k-1}^2 = S_n^2 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2.$$

Exercice 2.

1. (a) L'expression $P(x)$ a 1 pour racine évidente.

En divisant $P(x)$ par $x - 1$, on obtient la factorisation : $P(x) = (x - 1)(x^2 + x + 2)$.

Le trinôme $x^2 + x + 2$ a pour discriminant $\Delta = 1 - 4 \times 2 = -7 < 0$, donc est toujours positif (car son coefficient dominant est positif). Donc $x^3 + x - 2$ est du signe de $x - 1$, c'est-à-dire négatif lorsque $x \leq 1$, et positif lorsque $x \geq 1$.

- (b) La fonction f est définie en $t \in \mathbb{R}$ lorsque $t - 2 \in D_{\frac{1}{\cdot}}$ et que $\frac{t^3 + t - 2}{t - 2} \in D_{\sqrt{\cdot}}$, c'est-à-dire $t - 2 \neq 0$ et $\frac{t^3 + t - 2}{t - 2} \geq 0$.

Donc, d'après la question précédente :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad t \in D \Leftrightarrow (t \neq 2) \wedge (t - 1)(t - 2) \geq 0 \Leftrightarrow t \in] - \infty, 1] \cup]2, +\infty[.$$

Le domaine de définition de la fonction f est donc $D =] - \infty, 1] \cup]2, +\infty[$.

2. (a) La fonction $\sqrt{\cdot}$ étant dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction f est dérivable en $t \in D$ lorsque $\frac{t^3 + t - 2}{t - 2} > 0$; c'est-à-dire, d'après le raisonnement ci-dessus, que f a pour domaine de dérivabilité $I =] - \infty, 1[\cup]2, +\infty[$.

- (b) Notons $g : t \mapsto \frac{t^3 + t - 2}{t - 2}$. Ainsi, $f = \sqrt{g}$. D'après les formules de dérivation de $\sqrt{\cdot}$ et d'une composée, on a :

$$\forall t \in I, \quad f'(t) = \frac{g'(t)}{2f(t)},$$

donc, d'après la formule de dérivation d'un quotient :

$$\forall t \in I, \quad f'(t) = \frac{1}{2f(t)} \frac{(3t^2 + 1)(t - 2) - (t^3 + t - 2)}{(t - 2)^2} = \frac{2t^3 - 6t^2}{2(t - 2)^2 f(t)} = \frac{t^2(t - 3)}{(t - 2)^2 f(t)}.$$

3. D'après la question précédente :

$$\forall t \in I, \quad f'(t) \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 3,$$

et :

$$\forall t \in I, \quad f'(t) = 0 \Leftrightarrow (t = 0 \text{ ou } t = 3).$$

La fonction f est donc strictement décroissante sur $] - \infty, 1]$ et sur $]2, 3]$, puis strictement croissante sur $[3, +\infty[$.

On a directement $f(1) = 0$ et $f(3) = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$.

De plus, $g(t) = t^2 \frac{1 + \frac{1}{t} - \frac{2}{t^2}}{1 - \frac{2}{t}} \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} +\infty$ et, de même, $g(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$,

donc $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} +\infty$ et $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

On en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$		-		+	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$2\sqrt{7}$
				$\nearrow$	$+\infty$