

Devoir surveillé n° 2

Durée : 3 heures. Calculatrices non autorisées.

La notation tiendra largement compte de la qualité de la rédaction.

Les résultats doivent être encadrés. Il est inutile de recopier l'énoncé.

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre souhaité.

Les exercices qui ne sont pas traités dans l'ordre doivent être rédigés sur des copies séparées.

Le sujet et le brouillon ne sont pas à rendre. Le barème est indicatif.

Exercice 1. (8 points) On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1 - e^{-x}}$.

1. (a) Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité de la fonction f , et calculer sa dérivée.
 (b) Déterminer les variations de f , puis dresser le tableau de variations de f , avec ses limites.
 (c) Tracer l'allure de la courbe de f .
 (d) Déterminer l'équation cartésienne de la tangente à la courbe de f en $\ln(2)$.
2. (a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans un intervalle J à déterminer. On note $\varphi = f^{-1}$.
 (b) Quelle est la monotonie de φ sur J ? Déterminer une expression explicite de φ .
 (c) Tracer l'allure de la courbe de φ sur le graphe de la question 1c.

Exercice 2. (6 points) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on veut calculer la somme $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k k^2$.

1. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $T_p = S_{2p}$.
 (a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Calculer $T_p - T_{p-1}$.
 (b) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $T_p = \sum_{k=1}^p (T_k - T_{k-1})$.
 (c) En déduire la valeur de T_p , puis celle de S_n si n est pair.
2. Si n est impair, quelle formule a-t-on pour S_{n-1} ? En déduire une expression pour S_n .
3. Donner une expression générale de S_n (c'est-à-dire ne dépendant pas de la parité de n).

Exercice 3. (6 points) On cherche à déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = 2f(x)$. Soit f dans $\mathcal{E}$.

1. Déterminer $f(0)$.
2. On pose, pour tout $x \neq 0$, $g(x) = \frac{f(x)}{x}$.
 (a) Montrer que $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} f'(0)$.
 (b) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, g(x) = g\left(\frac{x}{2^n}\right)$.
 (c) En déduire g , puis f .
3. Quel est l'ensemble $\mathcal{E}$ recherché?
4. Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ non dérivable en 0 telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = 2f(x)$.

Problème. (12 points) On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.

I. 1. Calculer c_0 , c_1 , c_2 et c_3 .

2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$.

3. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n \in \mathbb{N}^*$.

4. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. En appliquant la formule du binôme à l'identité :

$$(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n,$$

montrer que : $c_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

II. On note dans cette question :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n c_k c_{n-k} \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^n k c_k c_{n-k}.$$

1. En effectuant le changement d'indice $i = n - k$, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n = \frac{n}{2} S_n$.

2. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{4k+2}{k+2}$.

3. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $4T_n + 2S_n = T_{n+1} + S_{n+1} - c_{n+1}$.

4. En déduire par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = S_n$.

III. 1. Déduire du résultat de la question II.2. que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $4 \left(\frac{n}{n+1} \right)^{\frac{3}{2}} \leq \frac{c_{n+1}}{c_n} \leq 4 \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{\frac{3}{2}}$.

2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{4^{n-1}}{n\sqrt{n}} \leq c_n \leq 3 \times \frac{4^{n-1}}{n\sqrt{n}}$.