
TD 7 : Corrigé partiel

Exercice 61

C'est en fait une conséquence directe du fait que le polynôme caractéristique (donc ses racines) soit un invariant de similitude.

Prouvons le néanmoins avec des outils géométriques.

Donnons nous A et B dans $M_n(\mathbb{K})$ semblables et $P \in Gl_n(\mathbb{K})$ telles que $B = P^{-1}AP$ ainsi que $\lambda \in Sp(A)$ (dans le but de montrer que $\lambda \in Sp(B)$).

On associe à λ une colonne propre X de A donc un $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = \lambda X$ et $X \neq 0_{n,1}$.

On en déduit que $P^{-1}AX = \lambda P^{-1}X$ ou que $P^{-1}AP(P^{-1}X) = \lambda P^{-1}X$.

En posant $Y = P^{-1}X$, il vient $BY = \lambda Y$ et si $Y = P^{-1}X = 0_{n,1}$ alors $X = P0_{n,1} = 0_{n,1}$, ce qui serait absurde.

Y est bien une colonne propre de B attachée à la valeur propre λ comme escompté■

Exercice 62

Supposons $A \in M_n(\mathbb{K})$ donc on peut écrire $A = PDP^{-1}$, où $P \in Gl_n(\mathbb{K})$ et $D \in D_n(\mathbb{K})$ (i.e diagonale de taille n). En transposant chaque membre de cette égalité matricielle (et en posant $Q = {}^tP$), il vient ${}^tA = Q^{-1}DQ$ (puisque D diagonale donc symétrique); ce qui montre (transitivité de la relation de similitude que A et sa transposée sont bien semblables car semblables toutes deux à D)■

Exercice 63

Soient x un tel vecteur propre de f et $\mu \neq 0$ sa valeur propre associée.

De $f(x) = \mu x$, on tire $x = f(\frac{1}{\mu}x) \in Im(f)$ ■

Exercice 64

Il suffit (cf exo 61) de montrer que AB et BA sont semblables.

En supposant sans perte de généralité A inversible, on a $BA = A^{-1}(AB)A$; ce qui achève le tout■

Exercice 65

a) Résulte des propriétés conjointes de la composition de des combinaisons linéaires des éléments de $L(E)$.

b) On procède par récurrence sur k . (Clair pour $k = 0$ puisque puissance 0 d'un endomorphisme est l'identité).

Supposons, n étant donné, que $gof^k - f^kog = k\lambda f^k$ donc, en composant par f à gauche chaque membre de cette égalité : $fog(f^k) - f^{k+1}og = k\lambda f^{k+1}$ (1).

Sachant que $\theta(f) = \lambda f$ soit que $fog = gof - \lambda f$ puis en injectant cette expression de fog dans (1), nous trouvons bien l'égalité souhaitée au rang $k + 1$; ce qui valide la récurrence.

c) On reprend le contexte du b) en supposant $\lambda \neq 0$.

Si pour tout k , $f^k \neq \omega$ alors $k\lambda$ est valeur propre de θ ; ce qui contredit la finitude de son spectre. Ainsi il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^k = \omega$ donc f nilpotent■

Exercice 66

a) On suit servilement l'indication en exploitant la j -ième de l'égalité $AX = 0_{n,1}$ qui nous donne (on pose J l'ensemble des entiers compris entre 1 et n qui sont différents de j) : $\sum_{k \in J} a_{jk}x_k = -a_{jj}x_j$ (1)

La définition de j implique que $x_j \neq 0$ (sinon $X = 0_{n,1}$) et que (2) : $\frac{|x_k|}{|x_l|} \leq 1$ pour tout $k \in J$ ainsi et successivement nous déduisons de (1):

$|\sum_{k \in J} a_{jk} \frac{x_k}{x_j}| = |a_{jj}|$ puis par inégalité triangulaire $\sum_{k \in J} |a_{jk}| \frac{|x_k|}{|x_j|} \geq |a_{jj}|$ soit enfin avec (2) $\sum_{k \in J} |a_{jk}| \geq |a_{jj}|$; ce qui contredit la propriété vérifiée par la matrice A .

Ainsi l'égalité $AX = 0_{n,1}$ implique $X = 0_{n,1}$ soit que A est inversible.

b) Enoncé parresseux : prenons $M = (m_{ij})$ en lieu et place de A qui joue double jeu.

Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $R_i = \sum_{j \neq i} m_{ij}$.

Soit $\lambda \in Sp(M)$ soit $B = M - \lambda I_n \notin GL_n(\mathbb{C})$ donc la matrice B ne doit pas posséder la propriété vérifiée par A .

Ainsi il existe i tel que $|b_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |b_{ij}|$ soit $|m_{ii} - \lambda| \leq R_i$.

Donc si $\lambda \in Sp(M)$ alors λ appartient à la réunion des disques fermés de centre m_{ii} et de rayon R_i comme espéré ■

Exercice 67

S et T sont clairement des endomorphismes de E .

a) T conserve degré et coefficient dominant, la seule valeur propre possible est 1. Elle est effectivement valeur propre puisque $T(1) = 1$.

Cherchons à préciser $E_1(T) = \text{Ker}(T - \text{id}_E)$.

Il s'agit des fonctions polynômes (à coefficients réels) P vérifiant, pour tout réel x , $P(x - a) = P(x)$.

Par récurrence (à faire) $P(na) = P(0)$, pour tout entier naturel (relatif même) et ($a \neq 0$) ce qui montre que P ne peut avoir de limite infinie en l'infini. En résumé P ne peut être que constant (et ces derniers conviennent). Bilan $\boxed{Sp(T) = \{1\} \text{ et } E_1(T) = \text{Vect}(1)}$.

b) S est une symétrie de E puisque $SoS = \text{id}_E$.

Par le cours le spectre de S est inclus dans $\{-1, 1\}$.

Soit $b = \frac{a}{2}$, posons, pour tout entier naturel k , $P_k = (X - b)^k$; on voit sans peine que $S(P_k) = (-1)^k P_k$ et comme tout élément de E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des P_k . Il en résulte que

$\boxed{Sp(S) = \{-1, 1\}}$ et $\boxed{E_1(S) = \text{Vect}(P_{2k}, k \in \mathbb{N})}$ puis $\boxed{E_{-1}(S) = \text{Vect}(P_{2k+1}, k \in \mathbb{N})}$ ■